1. Tutorium - Lösungen **20.10.2017**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel anzuschauen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

1.1 Indexschreibweise

a) $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i = x_i y_i$

b) $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{3} \begin{pmatrix} a_{1j}x_j \\ a_{2j}x_j \\ a_{3j}x_j \end{pmatrix} \to (\mathbf{A}\,\mathbf{x})_i = \sum_j a_{ij}x_j = a_{ij}x_j$

c) $\mathbf{A}^T\,\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{3} \begin{pmatrix} a_{j1}x_j \\ a_{j2}x_j \\ a_{j3}x_j \end{pmatrix} \to \left(\mathbf{A^T}\,\mathbf{x}\right)_i = \sum_j a_{ji}x_j = a_{ji}x_j$

d) $\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{3} \begin{pmatrix} a_{1j}x_j & a_{2j}x_j & a_{3j}x_j \end{pmatrix}$

$\to \left(\mathbf{x^T A^T}\right)_i = \sum_j a_{ij}x_j = a_{ij}x_j$

Anmerkung: In Indexschreibweise gibt es keinen Unterschied zwischen $\mathbf{Ax}$ und $\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T = (\mathbf{Ax})^T$.

e) $\mathrm{Sp}(\mathbf{ABC}) = (\mathbf{ABC})_{ii} = (\mathbf{A})_{ij}(\mathbf{B})_{jk}(\mathbf{C})_{ki} = a_{ij}b_{jk}c_{ki}$

$\mathrm{Sp}(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T\mathbf{C}^T) = (\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T\mathbf{C}^T)_{ii} = (\mathbf{B}^T)_{ij}(\mathbf{A}^T)_{jk}(\mathbf{C}^T)_{ki} = b_{ji}a_{kj}c_{ik} = a_{ij}b_{jk}c_{ki}$ (Der doppelt auftretende Index kann umbenannt werden.)

Anmerkung : $(\mathbf{ABC})^T = \mathbf{C}^T\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T \to \mathrm{Sp}(\mathbf{ABC}) = \mathrm{Sp}((\mathbf{ABC})^T) = \mathrm{Sp}(\mathbf{C}^T\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T) = \mathrm{Sp}(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T\mathbf{C}^T)$

f) $b_{jj} = \mathrm{Sp}(\mathbf{B})$ und $a_{ik}c_{ik} = (\mathbf{AC}^T)_{ii} = \mathrm{Sp}(\mathbf{AC}^T) \to a_{ik}b_{jj}c_{ik} = \mathrm{Sp}(\mathbf{AC}^T)\mathrm{Sp}(\mathbf{B})$

1.2 Transformationsmatrix

a) $\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1' & \mathbf{e}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 s_{11} + \mathbf{e}_2 s_{21} & \mathbf{e}_1 s_{12} + \mathbf{e}_2 s_{22} \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 & 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \to \mathbf{S} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

b)

In der originalen Basis $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

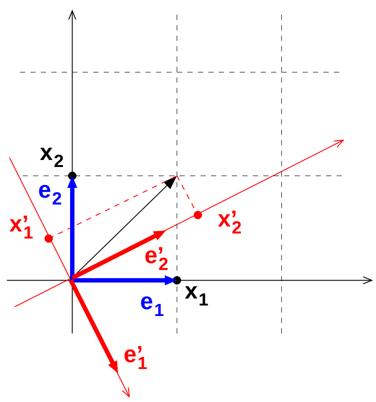
In der neuen Basis

$\mathbf{x} = x_1'\mathbf{e}_1' + x_2'\mathbf{e}_2' = x_1'\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2'\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} x_1' + 2x_2' \\ -2x_1' + x_2' \end{pmatrix}$

$\to x_1' + 2x_2' = \sqrt{5}$ und $-2x_1' + x_2' = \sqrt{5}$

$\to x_1' = -1/\sqrt{5}$ und $x_2' = 3/\sqrt{5}$



c) In der originalen Basis, $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

In der neuen Basis, $\mathbf{x} = x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix}\mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{pmatrix}\mathbf{S}\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{pmatrix}\mathbf{S}\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \mathbf{S}\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\end{pmatrix} = \mathbf{S}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$

Anmerkung : Für die orthogonale Basis existiert immer die Inverse $(\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2)^{-1}$.

$\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & -2\\2 & 1\end{pmatrix}$.

d) $x'_i x'_i = \begin{pmatrix}x'_1 & x'_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}\mathbf{T}^T\mathbf{T}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = x_i x_i$

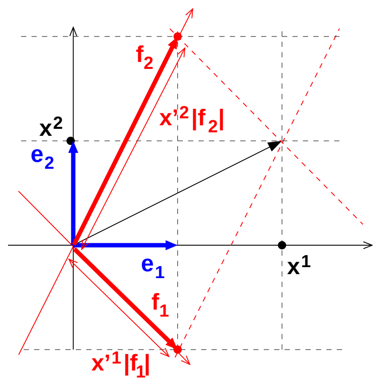
1.3 Transformation auf nicht-orthonormale Basis

a) In ähnlicher Weise wie Bsp.1.2a,

$\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 s_{11} + \mathbf{e}_2 s_{21} & \mathbf{e}_1 s_{12} + \mathbf{e}_2 s_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2\end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{S} = \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 2\end{pmatrix}$

In ähnlicher Weise wie Bsp.1.2c,

$\begin{pmatrix}\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'^1\\x'^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1\\x^2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}x'^1\\x'^2\end{pmatrix} = \mathbf{S}^{-1}\begin{pmatrix}x^1\\x^2\end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$



b)

$\begin{pmatrix}x'^1\\x'^2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

c)

$\begin{pmatrix}\mathbf{f}_1\cdot\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_1\cdot\mathbf{f}_2\\\mathbf{f}_2\cdot\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2\cdot\mathbf{f}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{f}_1^T\\\mathbf{f}_2^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2\end{pmatrix} = \mathbf{S}^T\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{pmatrix}\mathbf{S}$

$= \mathbf{S}^T\mathbf{S} = \begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 5\end{pmatrix}$

Anmerkung : Für orthonomale Basis, $\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2\\\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

d) Die Transformationsmatrix $\mathbf{S}^*$ wird definiert, durch $\begin{pmatrix}\mathbf{f}_1^* & \mathbf{f}_2^*\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{pmatrix}(\mathbf{S}^*)^T$

$\begin{pmatrix}\mathbf{f}_1^*\cdot\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_1^*\cdot\mathbf{f}_2\\\mathbf{f}_2^*\cdot\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2^*\cdot\mathbf{f}_2\end{pmatrix} = \mathbf{S}^*\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{pmatrix}\mathbf{S} = \mathbf{S}^*\mathbf{S} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

$\mathbf{S}^* = \mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{f}_1^* = \frac{2}{3}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{3}\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{f}_2^* = \frac{1}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{e}_2$

Alternative Lösung : Die Transformationsmatrix $\mathbf{S}^*$ wird definiert, durch $\begin{pmatrix}\mathbf{f}_1^* & \mathbf{f}_2^*\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2\end{pmatrix}(\mathbf{S}^*)^T$

$\begin{pmatrix}\mathbf{f}_1^*\cdot\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_1^*\cdot\mathbf{f}_2\\\mathbf{f}_2^*\cdot\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2^*\cdot\mathbf{f}_2\end{pmatrix} = \mathbf{S}^*\begin{pmatrix}\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2\end{pmatrix} = \mathbf{S}^*\begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

$\mathbf{S}^* = \begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 5\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}5 & 1\\1 & 2\end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{f}_1^* = \frac{5}{9}\mathbf{f}_1 + \frac{1}{9}\mathbf{f}_2$ und $\mathbf{f}_2^* = \frac{1}{9}\mathbf{f}_1 + \frac{2}{9}\mathbf{f}_2$