2. Tutorium **für 27.10.2017**

2.1 Kronecker-Delta und Levi-Civita Symbol

Das Kronecker-Delta : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Das Levi-Civita Symbol:

$$\varepsilon_{ijk\ldots} = \begin{cases} +1 & \text{falls} \quad (i,j,k,\cdots) \text{ eine gerade Permutation von } (1,2,3,\cdots) \text{ ist,} \\ -1 & \text{falls} \quad (i,j,k,\cdots) \text{ eine ungerade Permutation von } (1,2,3,\cdots) \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Berechne $\delta_{ii} + \delta_{ii}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{ji}$ in d-Dimensionen.

b) Gegeben seien 3 Vektoren, $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, und $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$, in einem kartesischen Koordinatensystem. Schreibe mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols den Ausdruck $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ in Indexschreibweise.

c) Berechne $\varepsilon_{ijk} a_i a_j$.

d) Gegeben sei eine 3×3-Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$. Schreibe mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols die Determinante $\det\mathbf{A}$ in Indexschreibweise.

e) Berechne $\partial_i x_j x_j$ für $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. ($(x_1, x_2, \cdots)$ sind die kartesischen Koordinaten.)

f) Berechne $\partial_i \sqrt{x_j x_j}$ in d Dimensionen.

2.2 Orthogonalprojektion

a) Ein Vektor $\mathbf{a}$ sei in einer orthonormalen Basis mit $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ dargestellt. Schreibe den zugehörigen Projektor $\mathbf{E_a} = \frac{\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}^\dagger}{\mathbf{a}^\dagger \cdot \mathbf{a}}$ als eine 2×2 Matrix.

b) Berechne $\mathbf{E_a}^n$.

c) Berechne $(\mathbf{1} - \mathbf{E_a})\mathbf{E_a}\mathbf{x}$ für $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

d) $\mathbf{E}_{\mathbf{e}_1}$ und $\mathbf{E}_{\mathbf{e}_2}$ sind die zugehörigen Projektoren zu den orthonormalen Basisvektoren $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechne $x_1' = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{e}_1}\mathbf{x}$ und $x_2' = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{e}_2}\mathbf{x}$ für einen beliebigen Vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und zeige $\mathbf{x} = x_1'\mathbf{e}_1 + x_2'\mathbf{e}_2$.

2.3 Duale Basis

Eine nicht-orthogonale Basis $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ wird mit einer orthonormalen Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ durch $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1$ und $\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ definiert. Die duale Basis $\{\mathbf{f}_1^*, \mathbf{f}_2^*\} := \{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2\}$ wird über $[\mathbf{f}_i^*, \mathbf{f}_j] = \mathbf{f}_i^* \cdot \mathbf{f}_j = \delta_{ij}$ bzw. $[\mathbf{f}^i, \mathbf{f}_j] = \mathbf{f}^i \cdot \mathbf{f}_j = \delta_j^i$ definiert.
a) Bestimme die dualen Basisvektoren $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2\}$ zur orthonormalen Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.
b) Ein Vektor $\mathbf{x}$ wird in der orthonormalen Basis mit $\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\,\mathbf{e}_2$ und in der dualen Basis mit $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}^1 + x_2\,\mathbf{e}^2$ dargestellt. Wie lautet die Transformation zwischen den Koordinaten (x^1, x^2) und (x_1, x_2)?
c) Bestimme die dualen Basisvektoren $\{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2\}$ zur nicht-orthogonalen Basis $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ und schreibe die Vektoren $\{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2\}$ mit der orthonormalen Basis $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2\}$.
d) Ein Vektor $\mathbf{x}$ wird in der nicht-orthogonalen Basis mit $\mathbf{x} = x'^1\mathbf{f}_1 + x'^2\,\mathbf{f}_2$ und in der dualen Basis mit $\mathbf{x} = x'_1\mathbf{f}^1 + x'_2\,\mathbf{f}^2$ dargestellt. Berechne die Transformationsmatrizen $\mathbf{T}$ und $\mathbf{T}^*$ wobei

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \mathbf{T}^* .$$

e) Zeige $x'_i = \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{x}$ und $x'^i = \mathbf{f}^i \cdot \mathbf{x}$.
f) Berechne, für den Vektor $\mathbf{x} = (3/2)\mathbf{f}_1 + (1/2)\mathbf{f}_2$, die Koordinaten (x^1, x^2) in der orthonormalen Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ und die Koordinaten (x'_1, x'_2) in der dualen Basis $\{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2\}$.
g) Zeige $x_i x^i = x'_i x'^i$ für beliebige Vektoren.

Ankreuzbar: 1a-f, 2ab, 2cd, 3ab, 3c-e, 3fg