2. Tutorium - Lösungen **27.10.2017**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel anzuschauen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

2.1 Kronecker-Delta und Levi-Civita Symbol

a) $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \cdots + \delta_{dd} = 1 + 1 + \cdots + 1 = d$, $\delta_{ii}\delta_{jj} = dd = d^2$, $\delta_{ij}\delta_{ji} = \delta_{ii} = d$
$\rightarrow \delta_{ii} + \delta_{ii}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{ji} = d + d^2 - d = d^2$
b) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i c_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k c_i$
c) $\underbrace{\varepsilon_{ijk} a_i a_j = \varepsilon_{jik} a_j a_i}_{\text{Umbenennung der Indizes}} = \varepsilon_{jik} \underbrace{a_j a_i}_{a_j a_i = a_i a_j} = \underbrace{\varepsilon_{jik}}_{\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ijk}} a_i a_j = -\varepsilon_{ijk} a_i a_j \rightarrow \varepsilon_{ijk} a_i a_j = 0$
Alternative Lösung : $\varepsilon_{ijk} a_i a_j = (\mathbf{a} \times \mathbf{a})_k = 0$
d) $\det\mathbf{A} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$
$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$
$= \varepsilon_{1jk} a_{11} a_{2j} a_{3k} + \varepsilon_{2jk} a_{12} a_{2j} a_{3k} + \varepsilon_{3jk} a_{13} a_{2j} a_{3k} = \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}$
e) $\partial_i x_j x_j = \delta_{ij} x_j + x_j \delta_{ij} = 2\delta_{ij} x_j = 2x_i$
f) $\partial_i \sqrt{x_j x_j} = \frac{1}{2\sqrt{x_k x_k}} \partial_i x_j x_j = \frac{2x_i}{2\sqrt{x_k x_k}} = \frac{x_i}{\sqrt{x_k x_k}}$

2.2 Orthogonalprojektion

a) $\mathbf{E_a} = \frac{\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}^\dagger}{\mathbf{a}^\dagger \cdot \mathbf{a}} = \frac{1}{|a_1|^2 + |a_2|^2} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^* & a_2^* \end{pmatrix} = \frac{1}{|a_1|^2 + |a_2|^2} \begin{pmatrix} |a_1|^2 & a_1 a_2^* \\ a_1^* a_2 & |a_2|^2 \end{pmatrix}$
b) $\mathbf{E_a}^2 = \frac{1}{(|a_1|^2 + |a_2|^2)^2} \begin{pmatrix} |a_1|^2 & a_1 a_2^* \\ a_1^* a_2 & |a_2|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |a_1|^2 & a_1 a_2^* \\ a_1^* a_2 & |a_2|^2 \end{pmatrix}$
$= \frac{1}{(|a_1|^2 + |a_2|^2)^2} \begin{pmatrix} |a_1|^4 + |a_1|^2|a_2|^2 & a_1 a_2^*(|a_1|^2 + |a_2|^2) \\ a_1^* a_2(|a_1|^2 + |a_2|^2) & |a_1|^2|a_2|^2 + |a_2|^4 \end{pmatrix} = \frac{1}{|a_1|^2 + |a_2|^2} \begin{pmatrix} |a_1|^2 & a_1 a_2^* \\ a_1^* a_2 & |a_2|^2 \end{pmatrix} = \mathbf{E_a}$
(oder $\mathbf{E_a}^2 = \frac{1}{(|a_1|^2 + |a_2|^2)^2} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1^* & a_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}_{= |a_1|^2 + |a_2|^2} \begin{pmatrix} a_1^* & a_2^* \end{pmatrix} = \frac{1}{|a_1|^2 + |a_2|^2} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^* & a_2^* \end{pmatrix} = \mathbf{E}_a$)

$\mathbf{E_a}^3 = \mathbf{E_a}\mathbf{E_a}^2 = \mathbf{E_a}\mathbf{E_a} = \mathbf{E_a}$
$\mathbf{E_a}^4 = \mathbf{E_a}\mathbf{E_a}^3 = \mathbf{E_a}\mathbf{E_a} = \mathbf{E_a}$
$\vdots$
$\mathbf{E_a}^n = \mathbf{E_a}$
c) $\mathbf{E_a x} = \frac{a_1^*}{|a_1|^2 + |a_2|^2} \mathbf{a} \rightarrow (\mathbf{1} - \mathbf{E_a}) \frac{a_1^*}{|a_1|^2 + |a_2|^2} \mathbf{a} = \frac{a_1^*}{|a_1|^2 + |a_2|^2} (\mathbf{a} - \mathbf{a}) = 0$
Alternative Lösung : $(\mathbf{1} - \mathbf{E_a})\mathbf{E_a} = \mathbf{E_a} - \mathbf{E_a}^2 = \mathbf{E_a} - \mathbf{E_a} = 0 \rightarrow (\mathbf{1} - \mathbf{E_a})\mathbf{E_a x} = 0$
d) Für reellen Einheitsvektoren, $\mathbf{E_{e_i}} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$. $\rightarrow \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{E_{e_i}} = \mathbf{e}_i$.
$x'_1 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E_{e_1} x} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1 - 2x_2)$ und $x'_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x_1 + x_2)$
$x'_1 \mathbf{e}_1 + x'_2 \mathbf{e}_2 = \frac{1}{5}(x_1 - 2x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}(2x_1 + x_2) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

2.3 Duale Basis

a) $\mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \rightarrow \mathbf{e}^i = \mathbf{e}_i^T$
b) $\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \end{pmatrix} \right]^T \rightarrow \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \mathbf{S}$ mit $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix} = \mathbf{S}^* \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \end{pmatrix}$

(Wenn $\mathbf{f}_i$ ein Spaltenvektor ist, wird der duale Vektor $\mathbf{f}^i$ als ein Zeilenvektor geschrieben (oder umgekehrt).)

Die duale Basis ist orthonormal zur ursprünglichen Basis

$\begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{S}^*\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{S}^* = \mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \mathbf{f}^1 = \mathbf{e}^1 - \frac{1}{2}\mathbf{e}^2$, $\mathbf{f}^2 = \frac{1}{2}\mathbf{e}^2$

Alternative Lösung:

$\mathbf{f}^1 \cdot \mathbf{f}_2 = 0 \rightarrow \mathbf{f}^1 = C(-2\mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^2)$ (C: Konstatnte), $\quad \mathbf{f}^1 \cdot \mathbf{f}_1 = 1 \rightarrow C = -1/2 \rightarrow \mathbf{f}^1 = \mathbf{e}^1 - \frac{1}{2}\mathbf{e}^2$

$\mathbf{f}^2 \cdot \mathbf{f}_1 = 0 \rightarrow \mathbf{f}^2 = C\mathbf{e}_2$ (C: Konstatnte), $\quad \mathbf{f}^2 \cdot \mathbf{f}_2 = 1 \rightarrow C = 1/2 \rightarrow \mathbf{f}^2 = (1/2)\mathbf{e}^2$

d) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \mathbf{S} \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \mathbf{S}^{-1} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}$

$\mathbf{x} = (x_1 \; x_2) \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \end{pmatrix} = (x'_1 \; x'_2) \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix} = (x'_1 \; x'_2)\, \mathbf{S}^* \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \end{pmatrix} \rightarrow (x'_1 \; x'_2) = (\mathbf{S}^*)^{-1}(x_1 \; x_2) = \mathbf{S}\,(x_1 \; x_2)$

$\rightarrow \mathbf{T}^* = \mathbf{S}$

e) $\mathbf{x} = x'_j \mathbf{f}^j \rightarrow \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{x} = x'_j \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}^j = x'_j {\delta_i}^j = x'_i$

$\mathbf{x} = x'^j \mathbf{f}_j \rightarrow \mathbf{f}^i \cdot \mathbf{x} = x'^j \mathbf{f}^i \cdot \mathbf{f}_j = x'^j {\delta^i}_j = x'^i$

oder ohne Indexschreibweise

$\mathbf{x} = x'_1 \mathbf{f}^1 + x'_2 \mathbf{f}^2 \rightarrow \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{x} = x'_1$ und $\mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{x} = x'_2$

$\mathbf{x} = x'^1 \mathbf{f}_1 + x'^2 \mathbf{f}_2 \rightarrow \mathbf{f}^1 \cdot \mathbf{x} = x'^1$ und $\mathbf{f}^2 \cdot \mathbf{x} = x'^2$

f) $\mathbf{x} = (1/2)(3\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2) \rightarrow x'^1 = 3/2$ und $x'^2 = 1/2$

$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x_1 = x^1$ und $x_2 = x^2$

$\rightarrow \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$

g) $x'_i x'^i = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \mathbf{T}^*\mathbf{T} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \mathbf{S}\mathbf{S}^{-1} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = x_i x^i$

Graphische Lösung :