3. Tutorium **für 3.11.2017**

3.1 Rechenbeispiele

a) Gegeben seien 2 Vektoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ in einem kartesischen Koordinatensystem. Berechne $\mathbf{E_a}^*\mathbf{b}$ wobei $\mathbf{a}^*$ ein zu $\mathbf{a}$ orthogonaler Vektor ist und $\mathbf{E_a}^*$ der zugehörige Projektor ist.
b) Berechne die Fäche F des von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannten Parallelogramms und zeige $F = \det\begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{pmatrix}$.
c) Gegeben seien 3 dreidimensionalen Vektoren, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ in einem kartesischen Koordinatensystem. Schreibe in Indexschreibweise das Volumen V des von den 3 Vektoren aufgespannten Parallelepipeds und zeige $V = \det\begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{pmatrix}$.
d) Zeige $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$ durch repräsentatives Einsetzen von Zahlen in die Indizes (Einsteinsche Summenkonvention beachten).
e) Zeige, dass für Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ in einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem gilt: $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2 + |\vec{a}\times\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$.
f) Zeige, dass für Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ in einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem gilt: $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$.

3.2 Reziprokes Gitter

Gegeben sei ein Kristallgitter mit Basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$. Die Basisvektoren des reziproken Gitters $\mathbf{b}^1$, $\mathbf{b}^2$, $\mathbf{b}^3$ sind einfach die Basisvektoren des Dualraumes $\mathcal{B}^*$, d.h. $\{\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \mathbf{b}^3\} = \{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2, \mathbf{f}^3\}$.
a) Schreibe das Volumen der primitiven Einheitszelle des Kristallgitters an. (Die Einheitszelle ist das von den Basisvektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ gebildete Parallelepiped.)
b) Bestimme die Basisvektoren $\mathbf{b}^1$, $\mathbf{b}^2$, $\mathbf{b}^3$ des reziproken Gitters.
Hinweis : Zuerst finde einen Vektor $\mathbf{v}^i$, der orthogonal zu den beiden Vektoren $\mathbf{a}_j$ und $\mathbf{a}_k$ ($j \neq i$, $k \neq i$) ist, und dann normiere den Vektor $\mathbf{b}^i = C\mathbf{v}^i$, sodass die Bedingung $\mathbf{b}^i \cdot \mathbf{a}_i = 1$ erfüllt wird.
c) Berechne das Volumen der primitiven Einheitszelle des reziproken Gitters.
d) Zeige, dass das reziproke Gitter des reziproken Gitters wieder aus den ursprünglichen Basisvektoren besteht.

3.3 Spektraltheorem

Gegeben sei eine Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

wobei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

für den Vektor $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ in einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem.

a) Berechne die Eigenwerte λ_i und die Eigenvektoren $\mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ der Matrix $\mathbf{A}$ und zeige, dass die Eigenvektoren orthogonal zueinander sind.

b) $\mathbf{E}_i$ seien die Projektoren auf die Eigenvektoren $\mathbf{e}_i$ (bzw. auf die Eigenräume mit den Eigenvektoren e_i). Zeige, dass sich die Matrix $\mathbf{A}$ in der spektralen Form $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \mathbf{E}_i$ schreiben lässt.

c) Schreibe $\mathbf{A}^n$ in der spektralen Form (d.h. $\mathbf{A}^n = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \mathbf{E}_i$).

d) Zeige, dass gilt $\exp(\mathbf{A}t) = \sum_{i=1}^{3} \exp(\lambda_i t)\mathbf{E}_i$.

e) Der Vektor wird in der Eigenbasis mit $\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{3} x'_i(t)\mathbf{e}_i$ dargestellt. Schreibe die Differentialgleichungen für $x'_i(t)$ an und löse die Gleichung. Zeige, dass gilt $\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}(0)$.

Ankreuzbar: 1a-c, 1d-f, 2ab, 2cd, 3ab, 3c-e