3. Tutorium - Lösungen **3.11.2017**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel anzuschauen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

3.1 Rechenbeispiele

a) $\mathbf{a}^* = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix} \to \mathbf{E_a}^* = \frac{1}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}^* \otimes (\mathbf{a}^*)^T \to \mathbf{E_a}^*\mathbf{b} = \frac{1}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}^*\,(\mathbf{a}^* \cdot \mathbf{b}) = \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{|\mathbf{a}|^2}\begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix}$

(Allgemein, $\mathbf{a}^* = C\begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix}$ mit einer beliebigen Konstante $C(\neq 0)$. Aber $\mathbf{E_a}^*$ ist unabhängig von C.)

b) Fläche : $F = |\mathbf{a}|\ |\mathbf{E_a}^*\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\frac{|a_2b_1 - a_1b_2|}{|\mathbf{a}|} = |a_2b_1 - a_1b_2| = |\det\begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{pmatrix}|(= |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|)$

c) Volumen : $V = |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}| = |(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_k c_k| = |\varepsilon_{ijk}a_ib_jc_k| = |\det\begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{pmatrix}|$ (siehe Bsp2.1d)

d)

i) Wenn $i = j$: $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = 0$. $\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} = \delta_{il}\delta_{im} - \delta_{im}\delta_{il}$ (ohne Summe über i)

Wenn $l = m = i$, $\delta_{il}\delta_{im} - \delta_{im}\delta_{il} = 1 - 1 = 0$ und sonst, $\delta_{il}\delta_{im} - \delta_{im}\delta_{il} = 0 - 0 = 0$

ii) Wenn $i \neq j$: In der Summe über k trägt $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}$ nur 1 Term ($k \neq i$ und $k \neq j$) bei.

ii-a) Wenn $l = i$ und $m = j$ (z.B. $i = l = 1$, $j = m = 2$, $k = 3$): $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kij} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 1$

$\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} = \delta_{ii}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{ji} = 1$ (ohne Einsteinsche Summenkonvention)

ii-b) Wenn $l = j$ und $m = i$ (z.B. $i = m = 1$, $j = l = 2$, $k = 3$): $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = -1$

$\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} = \delta_{ij}\delta_{ji} - \delta_{ii}\delta_{jj} = -1$ (ohne Einsteinsche Summenkonvention)

ii-c) Sonst ($l = m$ und/oder $l = k$ und/oder $m = k$): $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = 0$ und $\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} = 0$

Alternative Lösung: $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{abk}\delta_{ia}\delta_{jb}$ und $\varepsilon_{klm} = \varepsilon_{lmk} = \varepsilon_{cdk}\delta_{lc}\delta_{md}$

$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \varepsilon_{abk}\delta_{ia}\delta_{jb}\varepsilon_{cdk}\delta_{lc}\delta_{md} = \varepsilon_{abk}\varepsilon_{cdk}\delta_{ia}\delta_{jb}\delta_{lc}\delta_{md}$

Wenn $c = a$ und $d = b$, $\varepsilon_{abk}\varepsilon_{cdk} = \underbrace{\varepsilon_{abk}\varepsilon_{abk}}_{\text{Summe nur über } k} = 1$ und wenn $c = b$ und $d = a$, $\varepsilon_{abk}\varepsilon_{cdk} = \underbrace{\varepsilon_{abk}\varepsilon_{bak}}_{\text{Summe nur über } k} = -1$.

Sonst $\varepsilon_{abk}\varepsilon_{cdk} = 0$. $\to \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{ia}\delta_{jb}\delta_{la}\delta_{mb} - \delta_{ia}\delta_{jb}\delta_{lb}\delta_{ma} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$

e)

$\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2 + |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) + \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = a_ib_ia_jb_j + \varepsilon_{ijk}a_jb_k\varepsilon_{ilm}a_lb_m$

$= a_ib_ia_jb_j + (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})\,a_jb_ka_lb_m = a_ib_ia_jb_j + a_ja_jb_kb_k - a_jb_ka_kb_j = a_ja_jb_kb_k = (\vec{a} \cdot \vec{a})\left(\vec{b} \cdot \vec{b}\right) = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$.

Alternative Lösung :

Betrachte die zweidimensionale Ebene, die auf den Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannt.

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{E_a}\mathbf{b}|$ und $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{E_a}^*\mathbf{b}|$ (siehe Bsp.3.1ab)

$\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2 + |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{E_a}\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a}|^2|\mathbf{E_a}^*\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2(|\mathbf{E_a}\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{E_a}^*\mathbf{b}|^2) = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{E_a}\mathbf{b} + \mathbf{E_a}^*\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2$

(Weil $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^* = 0$, gilt $(\mathbf{E_a}\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{E_a}^*\mathbf{b}) = 0$.)

f) $[(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}]_i = \varepsilon_{ijk}(\vec{a} \times \vec{b})_jc_k = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jlm}a_lb_mc_k = \varepsilon_{ikj}\varepsilon_{klm}a_lb_mc_j = -\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}a_lb_mc_j$

$= -(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})a_lb_mc_j = -a_ib_jc_j + a_jb_ic_j = -(\vec{b} \cdot \vec{c})a_i + (\vec{a} \cdot \vec{c})b_i$

3.2 Reziprokes Gitter

a) $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} \to V = \det(\mathbf{F}) = (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}_3 \to$ Volumen : $|V|$

Anmerkung : Wenn die Basisvektoren ein Rechtssystem bilden, gilt $V > 0$ und ist das Volumen V.

b) $\mathbf{b}^1 \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}^1 \cdot \mathbf{a}_3 = 0 \to \mathbf{b}^{1T} = C\,\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3$ (C : Normierungsfaktor)

Normierung des Vektors $\mathbf{b}_1$: $1 = \mathbf{b}^1 \cdot \mathbf{a}_1 = C\,(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \cdot \mathbf{a}_1 \to C = 1/((\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \cdot \mathbf{a}_1) \equiv 1/V$

$\to \mathbf{b}^1 = \frac{1}{V}\,(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T$

In ähnlicher Weise $\mathbf{b}^2 = \frac{1}{V}\,(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1)^T$ und $\mathbf{b}^3 = \frac{1}{V}\,(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^T$

Anmerkung : $\mathbf{F}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^1 \\ \mathbf{b}^2 \\ \mathbf{b}^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{V} \begin{pmatrix} (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^T \\ (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1)^T \\ (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^T \end{pmatrix}$ ist die Inverse der Matrix $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{pmatrix}$

c) (siehe Bsp.3.1c) $V^* = \mathbf{b}^1 \cdot (\mathbf{b}^2 \times \mathbf{b}^3) = \det(\mathbf{F}^*) = (\det(\mathbf{F}))^{-1} = 1/V$, Volumen : $|V^*| = 1/|V|$

alternative Lösung:

$$V^* = \mathbf{b}^1 \cdot (\mathbf{b}^2 \times \mathbf{b}^3) = \mathbf{b}^1 \cdot \underbrace{\left(\left(\frac{1}{V}\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1\right) \times \mathbf{b}^3\right)}_{\text{Bsp.3.1f}} = \frac{1}{V}\mathbf{b}^1 \cdot (\underbrace{(\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}^3)}_{=1}\mathbf{a}_1 - \underbrace{(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}^3)}_{=0}\mathbf{a}_3) = \frac{1}{V}\mathbf{b}^1 \cdot \mathbf{a}_1 = \frac{1}{V}$$

d) $\mathbf{c}_1 = \frac{1}{V^*}\mathbf{b}^2 \times \mathbf{b}^3 = \frac{1}{V^*}\left(\frac{1}{V}\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1\right) \times \mathbf{b}^3 = \underbrace{(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1) \times \mathbf{b}^3}_{\text{Bsp.3.1f}} = \underbrace{(\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}^3)}_{=1}\mathbf{a}_1 - \underbrace{(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}^3)}_{=0}\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1$

Analog für $\mathbf{c}_2 = \mathbf{a}_2$ und $\mathbf{c}_3 = \mathbf{a}_3$.

3.3 Spektraltheorem

a) $\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ mit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Säkulardeterminante : $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 + \lambda - 2) = 0 \to \lambda = 0, 1, -2$

$\lambda_1 = 0 : \mathbf{A}\mathbf{e_1} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a-b+c \\ b \end{pmatrix} = 0 \to$ z.B. $\mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 1 : \mathbf{A}\mathbf{e_2} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a-b+c \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \to$ z.B. $\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = -2 : \mathbf{A}\mathbf{e_3} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a-b+c \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a \\ -2b \\ -2c \end{pmatrix} \to$ z.B. $\mathbf{e_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Orthogonalität $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$, $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$ und $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$

b) $\mathbf{E}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{E}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{E}_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\sum_i \lambda_i \mathbf{E}_i = 0 \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 1 \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2 \times \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}$$

c) Orthogonalität der Eigenbasis : $\mathbf{E}_i\mathbf{E_j} = 0$ wenn $i \neq j$. Bsp.2.2b : $\mathbf{E}_i^n = \mathbf{E}_i$

$\to \mathbf{A}^2 = \left(\sum_i \lambda_i \mathbf{E}_i\right)\left(\sum_j \lambda_j \mathbf{E}_j\right) = \sum_i (\lambda_i \mathbf{E}_i)^2 = \sum_i \lambda_i^2 \mathbf{E}_i$

$\to \mathbf{A}^3 = \left(\sum_i \lambda_i^2 \mathbf{E}_i\right)\left(\sum_j \lambda_j \mathbf{E}_j\right) = \sum_i \lambda_i^3 \mathbf{E}_i$

$\vdots$

$\to \mathbf{A}^n = \left(\sum_i \lambda_i^{n-1} \mathbf{E}_i\right)\left(\sum_j \lambda_j \mathbf{E}_j\right) = \sum_i \lambda_i^n \mathbf{E}_i$

d) $\exp(\mathbf{A}t) = \sum_n \frac{t^n}{n!} A^n = \sum_n \frac{t^n}{n!} \sum_i \lambda_i^n \mathbf{E}_i = \sum_i \left(\sum_n \frac{t^n}{n!}\lambda_i^n\right)\mathbf{E}_i = \sum_i \exp(\lambda_i t)\mathbf{E}_i$

e) $\mathbf{x}(t) = \sum_i x_i'(t)\mathbf{e}_i$

$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \to \sum_i \frac{d}{dt}x_i'(t)\mathbf{e}_i = \sum_i \lambda_i \mathbf{E}_i \mathbf{x}(t) = \sum_i \lambda_i x_i'(t)\mathbf{e}_i \to \frac{d}{dt}x_i'(t) = \lambda_i x_i'(t) \to x_i'(t) = x_i'(0)e^{\lambda_i t}$

$\to \mathbf{x}(t) = \sum_i x_i'(0)e^{\lambda_i t}\mathbf{e}_i = \sum_i e^{\lambda_i t}\mathbf{E}_i\mathbf{x}(0) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}(0)$