4. Tutorium **für 10.11.2017**

4.1 Differentialoperatoren

a) Berechne $\text{grad}|\mathbf{x}|$, wobei $\mathbf{x}$ der Ortsvektor ist (hier und im Folgenden ist in Indexschreibweise für eine dreidimensionale, orthonormale, euklidische Metrik zu rechnen).
b) Berechne $\text{div rot}\mathbf{v}$, wobei $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ ein ortsabhängiges Vektorfeld ist.
c) Berechne $\text{rot}(\mathbf{x}/|\mathbf{x}|)$, wobei $\mathbf{x}$ der Ortsvektor ist.
d) Berechne $\text{div}(\mathbf{x} \times \mathbf{p})$, wobei $\mathbf{x}$ der Ortsvektor und $\mathbf{p}$ ein konstanter Vektor ist.
e) Zeige $\text{rot}(\mathbf{F} \times \mathbf{x}) = (\mathbf{x} \cdot \nabla)\mathbf{F} - \mathbf{x}(\nabla \cdot \mathbf{F}) + 2\mathbf{F}$ wobei $\mathbf{x}$ der Ortsvektor und $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ ein ortsabhängiges Vektorfeld ist.

4.2 Spektraltheorem und Kommutator

a) Berechne die Eigenwerte λ_1, λ_2 der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.
b) Gib Polynome $p_i(t)$ an, für die $p_i(\lambda_j) = \delta_{ij}$ gilt.
c) Überprüfe für eines der Polynome, dass $p_i(\mathbf{A}) = \mathbf{E}_i$. ($\mathbf{E}_i$ ist der Projektoren auf den Eigenvektor mit Eigenwert λ_i.)
d) Schreibe $\mathbf{A}$ in der spektralen Form.
e) Schreibe $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ -10 & 10 \end{pmatrix}$ in der spektralen Form.
f) Berechne den Kommutator $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$.

4.3 Metrischer Tensor

Eine nicht-orthogonale Basis $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ wird mit einer orthonormalen Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ durch

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

definiert.
a) Berechne die Basisvektoren des dualen Raumes $\{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2, \mathbf{f}^3\}$.
b) Ein Vektor $\mathbf{x}$ wird in der orthonormalen Basis mit $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$ und in der nicht-orthogonalen Basis mit $\mathbf{x} = x'^i \mathbf{f}_i$ dargestellt. Berechne die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ zwischen den Koordinaten, d.h.

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} .$$

c) In den dualen Räumen wird der Vektor mit $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}^i = x'_i \mathbf{f}^i$ dargestellt. Berechne die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ zwischen den Koordinaten, d.h.

$$\begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \mathbf{T}^* .$$

d) Berechne die Transformationsmatrix $\mathbf{Q}$ zwischen den Koordinaten x'^i und x'_i, d.h.

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}$$

und überprüfe, dass $\mathbf{Q}$ identisch mit dem metrischen Tensor $\mathbf{g}' = (\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_i)$ ist.
e) Berechne $\sqrt{x_i x^i}$, $\sqrt{x'_i x'^i}$ und $\sqrt{x'^i g'_{ij} x'^j}$ für $(x^1, x^2, x^3) = (1, 1, 1)$
f) Zeige, dass gilt $\det(\mathbf{g}') = V^2$ wobei V das Volumen des von $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ gebildeten Parallelepipedes ist.

Ankreuzbar: 1a-e, 2a-d, 2ef, 3ab, 3cd, 3ef