6. Tutorium **für 24.11.2017**

6.1 Residuensatz

Berechne die folgenden Integrale in der komplexen Ebene:
a) $\oint_C \frac{z}{2z^2+4z-6}dz$ mit $C = \{z = 4e^{i\theta} \,|\, 0 \leq \theta < 2\pi\}$
b) $\oint_C \frac{1}{2z^2-3z-2}dz$ mit $C = \{z = e^{i\theta} \,|\, 0 \leq \theta < 2\pi\}$
c) $\lim_{R\to\infty} \oint_C \frac{1}{2z^2-3z-2}dz$ mit $C = \{z = Re^{i\theta} \,|\, 0 \leq \theta < 2\pi\}$
d) $\oint_C \frac{z^3-z^2+z+1}{2(z-1)^3}dz$ mit $C = \{z = 3e^{i\theta} \,|\, 0 \leq \theta < 2\pi\}$
e) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x^2+1}dx = \lim_{R\to\infty}\left(\oint_C \frac{e^{itz}}{z^2+1}dz - \int_{C_1} \frac{e^{itz}}{z^2+1}dz\right)$ mit $t > 0$ (Konstante), $C_1 = \{z = Re^{i\theta} \,|\, 0 < \theta < \pi\}$ und C einem geschlossenen Halbkreis, der aus C_1 und $C_2 = \{z = x | -R \leq x \leq R\}$ besteht.

6.2 Differentialoperatoren in krummlinigen Koordinaten

Betrachte eine infinitesimale Änderung $\mathbf{dx} = dx^i\mathbf{f}_i$ eines Vektors $\mathbf{x}$ in einem krummlinigen Koordinatensystem (x^1, x^2, x^3). Die Basisvektoren $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ seien ortsabhängig und nicht-orthogonal.
a) Zeige $\nabla x^i = \mathbf{f}^i$.
b) Berechne $\nabla \times (\nabla x^i)$.
c) Zeige $\nabla \cdot \left(\frac{1}{V}\mathbf{f}_1\right) = \nabla \cdot \left(\frac{1}{V}\mathbf{f}_2\right) = \nabla \cdot \left(\frac{1}{V}\mathbf{f}_3\right) = 0$ wobei $V = \sqrt{\det(\mathbf{g})}$ ($\mathbf{g}$: metrischer Tensor der krummlinigen Koordinaten).
Hinweis : Verwende die Identität $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$.
d) Zeige für ein ortsabhängiges Vektorfeld $\mathbf{v} = v^i(\mathbf{x})\mathbf{f}_i$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{V}\partial_i \left(V v^i\right) .$$

e) Zeige für ein ortsabhängiges Skalarfeld $\psi(\mathbf{x})$

$$\nabla^2\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{V}\partial_i \left(V g^{ij}\partial_j\psi(\mathbf{x})\right)$$

f) Zeige für ein orthogonales krummliniges Koordinatensystem

$$\nabla^2\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}} \sum_{i=1}^{3} \partial_i \left(\frac{\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}}{g_{ii}}\partial_i\psi(\mathbf{x})\right)$$

6.3 Orthogonale krummlinige Koordinaten

In einer kartesischen Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ist eine infinitesimale Änderung des Vektors $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$ durch $\mathbf{dx} = dx^i \mathbf{e}_i$ gegeben.
a) Mit den Kugelkoordinaten $(x'^1, x'^2, x'^3) = (r, \theta, \phi)$ und der entsprechenden Basis $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ wird die infinitesimale Änderung in die Form $\mathbf{dx} = dx'^i \mathbf{e}'_i$ umgeschrieben. Berechne die Transformationsmatrix $\mathbf{S}$ zwischen den Basisvektoren wobei $\mathbf{e}'_i = s^j{}_i \mathbf{e}_j$. Die Koordinatentransformation ist durch $(x^1, x^2, x^3) = (r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta)$ gegeben.
b) Berechne den metrischen Tensor $\mathbf{g'} = (g_{ij})$ der Kugelkoordinaten.
c) Zeige für Kugelkoordinaten

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{r^2} \partial_r \left(r^2 \partial_r \psi(\mathbf{x}) \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \partial_\theta \left(\sin\theta \partial_\theta \psi(\mathbf{x}) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \partial_\phi^2 \psi(\mathbf{x})$$

d) Zeige für Zylinderkoordinaten $(x'^1, x'^2, x'^3) = (\rho, \theta, z)$

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\rho} \partial_\rho \left(\rho \partial_\rho \psi(\mathbf{x}) \right) + \frac{1}{\rho^2} \partial_\theta^2 \psi(\mathbf{x}) + \partial_z^2 \psi(\mathbf{x})$$

Hinweis : Der metrische Tensor der Zylinderkoordinaten ist diagonal und die diagonalen Elemente sind durch $g_{11} = 1$, $g_{22} = \rho^2$, $g_{33} = 1$ gegeben (siehe Bsp5.2).
e) Berechne die Transformationsmatrix $\mathbf{S}$ für die Paraboloid-Koordinaten $(x'^1, x'^2, x'^3) = (u, v, \theta)$. Die Koordinatentransformation ist durch $(x^1, x^2, x^3) = (uv \cos\theta, uv \sin\theta, (u^2 - v^2)/2)$ gegeben.
f) Berechne den metrischen Tensor $\mathbf{g'} = (g_{ij})$ der Paraboloid-Koordinaten.
g) Zeige für Paraboloid-Koordinaten

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(u^2 + v^2) u} \partial_u \left(u \partial_u \psi(\mathbf{x}) \right) + \frac{1}{(u^2 + v^2) v} \partial_v \left(v \partial_v \psi(\mathbf{x}) \right) + \frac{1}{u^2 v^2} \partial_\theta^2 \psi(\mathbf{x})$$

Ankreuzbar: 1a-c, 1de, 2a-c, 2d-f, 3a-d, 3e-g