

7. Tutorium**für 15.12.2017****7.1 Delta-Distribution und Heaviside-Funktion**

Berechne die folgenden Integrale für die Delta-Distribution $\delta(x)$ und die Heaviside-Funktion $H(x)$.

a)
$$\int_0^{\infty} \delta(2x - \pi) (\sin(3x) + 2) dx$$

b)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2 - 1) e^x dx$$

c)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H\left(C - x^2 - \frac{y^2}{4}\right) dx dy \quad (C : \text{positive Konstante})$$

d)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(C - x^2 - \frac{y^2}{4}\right) dx dy \quad (C : \text{positive Konstante})$$

7.2 Verallgemeinerte Funktion

a) Berechne die erste und zweite Derivierte der Verallgemeinerten Funktion

$$f(x) = e^{|x|}.$$

b) Berechne die erste Derivierte der Verallgemeinerten Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & (0 \leq x \leq \pi) \\ 0 & (|x - \pi/2| > \pi/2) \end{cases}$$

und das Integral $\int_{\pi/2}^{\infty} f'(x) \cos x dx$.

7.3 Cauchyscher Hauptwert

a) Zeige, dass für $R > 0$ gilt

$$\int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \theta} d\theta < \frac{\pi}{2R}.$$

Hinweis: $\sin \theta \geq \frac{2}{\pi} \theta$ wenn $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

b) Berechne das Integral

$$\int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz$$

im Limes $R \rightarrow \infty$ wobei C_1 ein Halbkreis mit Radius R in der komplexen Ebene ist ($C_1 = \{Re^{i\theta} | 0 < \theta < \pi\}$).

c) Berechne das Integral

$$\int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z} dz$$

im Limes $r \rightarrow 0$ wobei C_2 ein Halbkreis mit Radius r in der komplexen Ebene ist ($C_2 = \{re^{i\theta} | 0 < \theta < \pi\}$).

d) Berechne den Cauchyschen Hauptwert

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx \right].$$

e) Berechne

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

7.4 Greensche Funktion

Gegeben sei eine Differentialgleichung

$$\mathcal{L}_t y(t) \equiv \left(\frac{d}{dt} + \gamma \right) y(t) = f(t)$$

($\gamma > 0$). Finde eine Greensche Funktion $G_I(t, t')$, die die inhomogene Differentialgleichung $\mathcal{L}_t G_I(t, t') = \delta(t - t')$ erfüllt.

Ankreuzbar: 1ab, 1cd, 2ab, 3a-c, 3d-e, 4