8. Tutorium - Lösungen **22.12.2017**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel anzuschauen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

8.1 Sturm-Liouville-Problem

Die Sturm-Liouville'schen Gestalt:
$\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right]+q(x)+\lambda\rho(x)\right)y(x)=0 \rightarrow p(x)y''(x)+p'(x)y'(x)+q(x)y(x)+\lambda\rho(x)y(x)=0$
a) (Legendresche Differentialgleichung) $(1-x^2)y''(x)-2xy'(x)+\ell(\ell+1)y(x)=0$
Vergleich mit der Differentialgleichung in der Sturm-Liouville'schen Gestalt :
$p'(x)/p(x)=-2x/(1-x^2)$, $q(x)/p(x)=0$ und $\lambda\rho(x)/p(x)=\ell(\ell+1)/(1-x^2) \rightarrow \log(p(x))=\log(1-x^2)$
$\rightarrow p(x)=1-x^2$, $q(x)=0$ und $\lambda\rho(x)=\ell(\ell+1) \rightarrow \left(\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}\right]+\ell(\ell+1)\right)y(x)=0$
b) (Hermitesche Differentialgleichung) $y''(x)-2xy'(x)+2\alpha y(x)=0$
Vergleich mit der Differentialgleichung in der Sturm-Liouville'schen Gestalt :
$p'(x)/p(x)=-2x$, $q(x)/p(x)=0$ und $\lambda\rho(x)/p(x)=2\alpha \rightarrow \log(p(x))=-x^2$
$\rightarrow p(x)=e^{-x^2}$, $q(x)=0$ und $\lambda\rho(x)=2\alpha e^{-x^2}$. $\rightarrow \left(\frac{d}{dx}\left[e^{-x^2}\frac{d}{dx}\right]+2\alpha e^{-x^2}\right)y(x)=0$
c) (Laguerresche Differentialgleichung) $xy''(x)+(1-x)y'(x)+ay(x)=0$
Vergleich mit der Differentialgleichung in der Sturm-Liouville'schen Gestalt :
$p'(x)/p(x)=(1-x)/x$, $q(x)/p(x)=0$ und $\lambda\rho(x)/p(x)=a/x \rightarrow \log(p(x))=\log(x)-x$
$\rightarrow p(x)=xe^{-x}$, $q(x)=0$ und $\lambda\rho(x)=ae^{-x}$. $\rightarrow \left(\frac{d}{dx}\left[xe^{-x}\frac{d}{dx}\right]+ae^{-x}\right)y(x)=0$
d) (Tschebyschow-Differentialgleichung) $(1-x^2)y''(x)-xy'(x)+n^2y(x)=0$
Vergleich mit der Differentialgleichung in der Sturm-Liouville'schen Gestalt :
$p'(x)/p(x)=-x/(1-x^2)$, $q(x)/p(x)=0$ und $\lambda\rho(x)/p(x)=n^2/(1-x^2) \rightarrow \log(p(x))=\frac{1}{2}\log(1-x^2)$
$\rightarrow p(x)=\sqrt{1-x^2}$, $q(x)=0$ und $\lambda\rho(x)=n^2/\sqrt{1-x^2}$. $\rightarrow \left(\frac{d}{dx}\left[\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}\right]+n^2/\sqrt{1-x^2}\right)y(x)=0$

8.2 Liouville'sche Normalform

a) $xy''+2y'+(1+\alpha)xy=0$
Vergleich mit der Differentialgleichung in der Sturm-Liouville'schen Gestalt :
$p'(x)/p(x)=2/x$, $q(x)/p(x)=1$ und $\lambda\rho(x)/p(x)=\alpha \rightarrow \log(p(x))=2\log(x)$
$\rightarrow p(x)=x^2$, $q(x)=x^2$ und $\lambda\rho(x)=\alpha x^2$. $\rightarrow \left(\frac{d}{dx}\left[x^2\frac{d}{dx}\right]+(1+\alpha)x^2\right)y(x)=0$
b) Wenn $p(x)=\rho(x)$, gilt $t(x)=x$. D.h. die Differentialgleichungen in der Sturm-Liouville'schen Gestalt und in der Liouville'schen Normalform haben die gleiche Variable.
Ansatz: $w(x)=u(x)y(x)$
Differentialgleichungen in der Liouville'schen Normalform: $-uy''-2u'y'+(-u''+vu-\lambda u)y=0$
Vergleich der Koeffizienten : $2u'/u=2/x$ und $u''/u-v+\lambda=1+\alpha$
$\rightarrow u=x$ und $-v+\lambda=1+\alpha$ $(v(x)=-1,\lambda=\alpha$
$-w''(x)+(-1-\alpha)w(x)=0$

8.3 Greensche Funktion

Ansatz : $G_I(t,t')=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{G}_I(\omega)\,e^{i\omega(t-t')}d\omega$
$\mathcal{L}_tG_I(t,t')=\delta(t-t') \rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(-\omega^2+2i\gamma\omega-3\gamma^2)\tilde{G}_I(\omega)\,e^{i\omega(t-t')}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega(t-t')}d\omega$
Vergleich der Integranden: $(-\omega^2+2i\gamma\omega-3\gamma^2)\tilde{G}_I(\omega)=1$
$\rightarrow \tilde{G}_I(\omega)=\frac{1}{-\omega^2+2i\gamma\omega-3\gamma^2}=-\frac{1}{(\omega-\lambda_1)(\omega-\lambda_2)}\quad(\lambda_{1,2}=-i\gamma,3i\gamma)$
Fourier-Transformation $G_I(t,t')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega(t-t')}\tilde{G}_I(\omega)d\omega=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega(t-t')}}{(\omega-\lambda_1)(\omega-\lambda_2)}d\omega$
Das Integral kann mit $\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega(t-t')}\tilde{G}_I(\omega)d\omega=\oint_{C_1}e^{i\omega(t-t')}\tilde{G}_I(\omega)d\omega-\int_{\tilde{C}_1}e^{i\omega(t-t')}\tilde{G}_I(\omega)d\omega$

oder $-\oint_{C_2} e^{i\omega(t-t')}\tilde{G}_I(\omega)d\omega + \int_{\tilde{C}_2} e^{i\omega(t-t')}\tilde{G}_I(\omega)d\omega$ gerechnet werden. Hier $\tilde{C}_1 = \{z = re^{i\theta}|r = R, 0 < \theta < \pi\}$ ist der obere Halbkreis und $\tilde{C}_2 = \{z = re^{i\theta}|r = R, \pi < \theta < 2\pi\}$ ist der untere Halbkreis. C_1 und C_2 sind der geschlossene Halbkreis der den Pfad $\{z = re^{i\theta}| - R < r < R, \theta = 0\}$ enthalten.
Auf den Halbkreisen glit $|e^{i\omega(t-t')}| = |\exp(iRe^{i\theta}(t-t'))| = |\exp([i\mathrm{Re}(Re^{i\theta}) - \mathrm{Im}(Re^{i\theta})](t-t'))|$
$= |\exp(-\mathrm{Im}(Re^{i\theta})(t-t'))|$. Im Limes $R \to \infty$, $|e^{i\omega(t-t')}| \to 0$ auf dem oberen Halbkreis $\tilde{C}_1$ (d.h. $\mathrm{Im}(Re^{i\theta}) > 0$) wenn $t > t'$ oder auf dem unteren Halbkreis $\tilde{C}_2$ (d.h. $\mathrm{Im}(Re^{i\theta}) < 0$) wenn $t < t'$.
Da $\lim_{R\to\infty} \tilde{G}_I(\omega) = 0$, gilt $\int_{\tilde{C}_1} e^{i\omega(t-t')}\tilde{G}_I(\omega)d\omega \to 0$ wenn $t > t'$ und $\int_{\tilde{C}_2} e^{i\omega(t-t')}\tilde{G}_I(\omega)d\omega \to 0$ wenn $t < t'$.
Mit Hilfe des Residuensatzes und im Limes $R \to \infty$,
$G_I(t,t') = \frac{1}{2\pi}H(t-t')\oint_{C_1} e^{i\omega(t-t')}\tilde{G}_I(\omega)d\omega - \frac{1}{2\pi}H(t'-t)\oint_{C_2} e^{i\omega(t-t')}\tilde{G}_I(\omega)d\omega$
$= -iH(t-t')\left.\frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-\lambda_1}\right|_{\omega=\lambda_2} + iH(t'-t)\left.\frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-\lambda_2}\right|_{\omega=\lambda_1} = -H(t-t')\frac{e^{-3\gamma(t-t')}}{4\gamma} - H(t'-t)\frac{e^{\gamma(t-t')}}{4\gamma}$
b) $y_I(t) = \int_0^\infty G_I(t,t')f(t')dt' = -\int_0^t \frac{e^{-3\gamma(t-t')}}{4\gamma}e^{-\omega_0 t'}dt' - \int_t^\infty \frac{e^{\gamma(t-t')}}{4\gamma}e^{-\omega_0 t'}dt' = -\frac{e^{-\omega_0 t}-e^{-3\gamma t}}{4\gamma(3\gamma-\omega_0)} - \frac{e^{-\omega_0 t}}{4\gamma(\gamma+\omega_0)}$
$\to y_I(0) = -\frac{1}{4\gamma(\gamma+\omega_0)}$
$y_I'(t) = \frac{\omega_0 e^{-\omega_0 t}-3\gamma e^{-3\gamma t}}{4\gamma(3\gamma-\omega_0)} + \frac{\omega_0 e^{-\omega_0 t}}{4\gamma(\gamma+\omega_0)} \to y_I'(0) = -\frac{1}{4\gamma} + \frac{\omega_0}{4\gamma(\gamma+\omega_0)} = -\frac{1}{4(\gamma+\omega_0)}$
c) homogene Differentialgleichung: $\mathcal{L}_t G_0(t,t') = 0$
Fouriertransformation : $-(\omega-\lambda_1)(\omega-\lambda_2)\tilde{G}_0(\omega) = 0$
$\to \tilde{G}_0(\omega)$ muss außer $\omega = \lambda_{1,2}$ null sein. $\to \tilde{G}_0(\omega) = a_1\delta(\omega+i\gamma) + a_2\delta(\omega-3i\gamma)$.
$\to G_0(t,t') = A_1 e^{\gamma(t-t')} + A_2 e^{-3\gamma(t-t')}$ mit $A_1 = a_1/(2\pi)$ und $A_2 = a_2/(2\pi)$.
$y_1(t) = \int_0^\infty e^{\gamma(t-t')}e^{-\omega_0 t'}dt' = \frac{e^{\gamma t}}{\omega_0+\gamma}$
$y_2(t) = \int_0^\infty e^{-3\gamma(t-t')}e^{-\omega_0 t'}dt' = \frac{e^{-3\gamma t}}{\omega_0-3\gamma}$ (nur wenn $\omega_0 > 3\gamma$. Sonst $y_2(t) \to \infty$.)
$y(t) = y_I(t) + A_1 y_1(t) \to y(0) = -\frac{1}{4\gamma(\gamma+\omega_0)} + C_1\frac{1}{\omega_0+\gamma}$
Wenn $A_1 = \frac{1}{4\gamma}$, $y(0) = 0$
$y'(t) = y_I'(t) + \frac{1}{4\gamma}y_1'(t) \to y'(0) = -\frac{1}{4(\gamma+\omega_0)} + \frac{1}{4\gamma}\frac{\gamma}{\omega_0+\gamma} = 0$
$\to y(t) = y_I(t) + \frac{1}{4\gamma}y_1(t) = -\frac{e^{-\omega_0 t}-e^{-3\gamma t}}{4\gamma(3\gamma-\omega_0)} - \frac{e^{-\omega_0 t}-e^{\gamma t}}{4\gamma(\gamma+\omega_0)}$
Alternative Lösung :
homogene Differentialgleichung: $\mathcal{L}_t y_0(t) = 0$
Fouriertransformation : $-(\omega-\lambda_1)(\omega-\lambda_2)\tilde{y}_0(\omega) = 0$
$\to y_0(t) = b_1 e^{\gamma t} + b_2 e^{-3\gamma t}$
$\to y(t) = y_I(t) + y_0(t)$
Der Rest der Rechnung ist gleich wie die oberen Lösung.

8.4 Separationsansatz

Ansatz: $\psi(\mathbf{x}) = R(r)P(\theta)F(\phi)$
Differentialgleichung $(\mathcal{L}_r R)PF + r^{-2}(\mathcal{L}_\theta P)RF + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}(\mathcal{L}_\phi F)RP + \frac{2}{r}RPF = -2ERPF$
mit $\mathcal{L}_r = r^{-2}\partial_r(r^2\partial_r)$, $\mathcal{L}_\theta = \sin^{-1}\theta\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta)$, und $\mathcal{L}_\phi = \partial_\phi^2$.
multiplizieren mit $r^2/(RPF)$: $r^2R^{-1}\mathcal{L}_r R + P^{-1}\mathcal{L}_\theta P + \frac{1}{\sin^2\theta}F^{-1}\mathcal{L}_\phi F + 2r = -2Er^2$
$\to r^2R^{-1}\mathcal{L}_r R + 2r + 2Er^2 = -P^{-1}\mathcal{L}_\theta P - \frac{1}{\sin^2\theta}F^{-1}\mathcal{L}_\phi F$
linke Seite: Funktion von r, rechte Seite: Funktion von θ, ϕ
$\to$ Die Gleichung gilt nur wenn die beide Seiten konstant sind (unabhängig von r, θ, ϕ).
$r^2R^{-1}\mathcal{L}_r R + 2r + 2Er^2 = Z_1 \to \mathcal{L}_r R + (2/r)R - (Z_1/r^2)R + 2ER = 0$
$-P^{-1}\mathcal{L}_\theta P - \frac{1}{\sin^2\theta}F^{-1}\mathcal{L}_\phi F = Z_1$
multiplizieren mit $-\sin^2\theta$
$\sin^2\theta P^{-1}\mathcal{L}_\theta P + Z_1\sin^2\theta = -F^{-1}\mathcal{L}_\phi F$
Die Gleichung gilt nur wenn die beide Seiten konstant sind (unabhängig von θ, ϕ).
$\sin^2\theta P^{-1}\mathcal{L}_\theta P + Z_1\sin^2\theta = Z_2 \to \mathcal{L}_\theta P + Z_1 P - \frac{Z_2}{\sin^2\theta}P = 0$
und
$\mathcal{L}_\phi F = -Z_2 F$