9. Tutorium - Lösungen **12.1.2018**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel anzuschauen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

9.1 Gamma- und Beta-Funktionen

a) $t = 1/2 + x \to \Gamma(1/2 + x)\Gamma(1/2 - x) = \Gamma(t)\Gamma(1 - t) = \frac{\pi}{\sin(\pi t)} = \frac{\pi}{\sin(\pi x+\pi/2)} = \frac{\pi}{\cos(\pi x)}$
b) $\Gamma(1/2)^2 = \left(\int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}dt\right)\left(\int_0^\infty s^{-1/2}e^{-s}ds\right) = \int_0^\infty 2e^{-x^2}dx \int_0^\infty 2e^{-y^2}dy = 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2}dxdy$
$= 4\int_0^\infty dr \int_0^{\pi/2} d\theta e^{-r^2}r = 2\pi \int_0^\infty dre^{-r^2}r = 2\pi\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_0^\infty = \pi$
$\to \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \qquad (\Gamma(1/2) = \int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}dt > 0)$.
c) n: gerade ganze Zahl $\to x^n e^{-ax^2}$ ist eine gerade Funktion
$\int_{-\infty}^\infty x^n e^{-ax^2}dx = 2\int_0^\infty x^n e^{-ax^2}dx = 2\int_0^\infty a^{-n/2}t^{n/2}e^{-t}\frac{1}{2\sqrt{at}}dt = a^{-(n+1)/2}\int_0^\infty t^{(n-1)/2}e^{-t}dt$
$= a^{-(n+1)/2}\Gamma((n+1)/2)$
Wenn $n = 4$ und $a = 1/2$, $\int_{-\infty}^\infty x^n e^{-ax^2}dx = 2^{5/2}\Gamma(5/2) = 2^{5/2}\frac{3\sqrt{\pi}}{4} = 3\sqrt{2\pi}$
$(\Gamma(5/2) = (3/2)\Gamma(3/2) = (3/4)\Gamma(1/2) = 3\sqrt{\pi}/4)$
d) $t = \cos^2\theta$ (wenn $0 \le \theta \le \pi/2$, $1 \ge t \ge 0$) $\to dt = -2\cos\theta\sin\theta d\theta \to d\theta = -(1/2)t^{-1/2}(1-t)^{-1/2}dt$
$\int_0^{\pi/2}\cos^n\theta\, d\theta = \int_1^0 t^{n/2}\left(-\frac{1}{2}\right)t^{-1/2}(1-t)^{-1/2}dt = -\frac{1}{2}\int_1^0 t^{(n-1)/2}(1-t)^{-1/2}dt = \frac{1}{2}B((n+1)/2, 1/2)$
Wenn $n = 3$, $\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\Gamma(2)\Gamma(1/2)/\Gamma(5/2) = \frac{2}{3}$
Anmerkung : Rekursionsrelation für das Volmen V_n einer n-dimensionalen Kugel mit Radius 1 :
$V_n = B((n+1)/2, 1/2)V_{n-1} \to$ Lösung $V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$

9.2 Greensche Funktion

Ansatz : $G_I(t,t') = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^\infty \tilde{G}_I(\omega)\, e^{i\omega(t-t')}d\omega$
$\mathcal{L}_t G_I(t,t') = \delta(t-t') \to \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty(-\omega^2+\Omega^2)\tilde{G}_I(\omega)\, e^{i\omega(t-t')}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{i\omega(t-t')}d\omega$
Vergleich der Integranden: $(-\omega^2+1)\tilde{G}_I(\omega) = 1$
$\to \tilde{G}_I(\omega) = \frac{1}{-\omega^2+\Omega^2} = -\frac{1}{(\omega-\Omega)(\omega+\Omega)}$
$G_I(t,t') = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(\omega-\Omega)(\omega+\Omega)}e^{i\omega(t-t')}d\omega$
Das Integral wird mit einer Verschiebung der Pole bei $i\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) gerechnet.
$G_I^{(\varepsilon)}(t,t') = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(\omega-\Omega-i\varepsilon)(\omega+\Omega-i\varepsilon)}e^{i\omega(t-t')}d\omega$
$= -\frac{1}{2\pi}H(t-t')\lim_{R\to\infty}\left(\oint_{C_1}\frac{1}{(\omega-\Omega-i\varepsilon)(\omega+\Omega-i\varepsilon)}e^{i\omega(t-t')}d\omega - \int_{c_1}\frac{1}{(\omega-\Omega-i\varepsilon)(\omega+\Omega-i\varepsilon)}e^{i\omega(t-t')}d\omega\right)$
$+\frac{1}{2\pi}H(t'-t)\lim_{R\to\infty}\left(\oint_{C_2}\frac{1}{(\omega-\Omega-i\varepsilon)(\omega+\Omega-i\varepsilon)}e^{i\omega(t-t')}d\omega - \int_{c_2}\frac{1}{(\omega-\Omega-i\varepsilon)(\omega+\Omega-i\varepsilon)}e^{i\omega(t-t')}d\omega\right)$
wobei C_1 (C_2) der obere (untere) geschloßene Halbkreis mit Radius R ist und c_1 (c_2) der obere (untere) offene Halbkreis.
Im Limes $R \to \infty$ konvergieren die Integrale (2. und 4. Integrale) entlang der oberen offenen Halbkreise gegen null. Da beide Pole in der oberen Halbebene sind, ist das 3. Integral auch null.
$G_I^{(\varepsilon)}(t,t') = -\frac{1}{2\pi}H(t-t')\oint_{C_1}\frac{1}{(\omega-\Omega-i\varepsilon)(\omega+\Omega-i\varepsilon)}e^{i\omega(t-t')}d\omega = -iH(t-t')\left(\frac{1}{2\Omega}e^{i(\Omega+i\varepsilon)(t-t')} - \frac{1}{2\Omega}e^{i(-\Omega+i\varepsilon)(t-t')}\right)$
$G_I^+(t,t') = \lim_{\varepsilon\to 0^+}G_I^{(\varepsilon)}(t,t') = -iH(t-t')\frac{1}{2\Omega}\left(e^{i\Omega(t-t')} - e^{-i\Omega(t-t')}\right) = H(t-t')\frac{1}{\Omega}\sin(\Omega(t-t'))$
b) Wenn $\varepsilon < 0$, sind die beide Pole in der unteren Halbebene.
$G_I^{(\varepsilon)}(t,t') = \frac{1}{2\pi}H(t'-t)\oint_{C_2}\frac{1}{(\omega-\Omega-i\varepsilon)(\omega+\Omega-i\varepsilon)}e^{i\omega(t-t')}d\omega = iH(t'-t)\left(\frac{1}{2\Omega}e^{i(\Omega+i\varepsilon)(t-t')} - \frac{1}{2\Omega}e^{i(-\Omega+i\varepsilon)(t-t')}\right)$
$G_I^-(t,t') = \lim_{\varepsilon\to 0^-}G_I^{(\varepsilon)}(t,t') = iH(t'-t)\frac{1}{2\Omega}\left(e^{i\Omega(t-t')} - e^{-i\Omega(t-t')}\right) = -H(t'-t)\frac{1}{\Omega}\sin(\Omega(t-t'))$

c) $G_0(t,t') = G^+(t,t') - G^-(t,t')$
$= (H(t-t') + H(t'-t))\frac{1}{\Omega}\sin(\Omega(t-t')) = \frac{1}{\Omega}\sin(\Omega(t-t'))$
$\frac{d^2}{dt^2}G_0(t,t') = -\Omega\sin(\Omega(t-t')) = -\Omega^2 G_0(t,t') \to$ erfüllt die homogene Gleichung.

9.3 Frobenius-Methode

a) Ansatz : $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\sigma}$ mit $a_0 \neq 0$
$2xy'' + y' - x^2 y = \sum_{n=0}^{\infty} x^\sigma \left[2(n+\sigma)(n+\sigma-1)a_n x^{n-1} + (n+\sigma)a_n x^{n-1} - a_n x^{n+2}\right]$
$= x^\sigma \sum_{n=3}^{\infty} \left[2(n+\sigma)(n+\sigma-1)a_n + (n+\sigma)a_n - a_{n-3}\right] x^{n-1} + (2\sigma(\sigma-1)+\sigma)a_0 x^{\sigma-1}$
$+(2(\sigma+1)\sigma + (\sigma+1))a_1 x^\sigma + (2(\sigma+2)(\sigma+1) + (\sigma+2))a_2 x^{\sigma+1} = 0$
Die Gleichung gilt für beliebige x. $\to$ Alle Koeffizienten der $x^{\sigma+n}$-Term müssen null sein.
$x^{\sigma-1}$-Term: $(2\sigma(\sigma-1)+\sigma)a_0 = 0 \to$ wegen $a_0 \neq 0$, $2\sigma(\sigma-1)+\sigma = \sigma(2\sigma-1) = 0 \to \sigma = 0, 1/2$
x^σ-Term : $(\sigma+1)(2\sigma+1)a_1 = 0$. Weil $\sigma = 0$ oder $1/2$, muss a_1 null sein.
$x^{\sigma+1}$-Term : $(\sigma+2)(2\sigma+3)a_2 = 0 \to a_2 = 0$
$x^{\sigma+n-1}$-Term $(n \geq 3)$: $2(n+\sigma)(n+\sigma-1)a_n + (n+\sigma)a_n - a_{n-3} = 0$
$\to a_n = \frac{1}{(n+\sigma)(2n+2\sigma-1)}a_{n-3}$
Wenn $\sigma = 0$, $a_n = \frac{1}{n(2n-1)}a_{n-3}$
$a_3 = \frac{1}{3\cdot 5}a_0, \quad a_4 = \frac{1}{4\cdot 7}a_1 = 0, \quad a_5 = \frac{1}{5\cdot 9}a_2 = 0, \quad a_6 = \frac{1}{6\cdot 11}a_3 = \frac{1}{6\cdot 11}\frac{1}{3\cdot 5}a_0,$
Wenn $\sigma = 1/2$, $a_n = \frac{1}{n(2n+1)}a_{n-3}$
In gleicher Weise, $a_{3j+1} = a_{3j+2} = 0$.
$a_3 = \frac{1}{3\cdot 7}a_0$, $a_6 = \frac{1}{3\cdot 7}\frac{1}{6\cdot 13}a_0$
allgemeine Lösung:
$y(x) = A_1(1 + \frac{1}{15}x^3 + \frac{1}{66}\frac{1}{15}x^6 + \cdots) + A_2(x^{1/2} + \frac{1}{21}x^{7/2} + \frac{1}{78}\frac{1}{21}x^{13/2} + \cdots)$

9.4 Frobenius-Methode 2

Ansatz : $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\sigma}$ mit $a_0 \neq 0$
$xy'' + y' - y = \sum_{n=0}^{\infty} x^\sigma \left[(n+\sigma)(n+\sigma-1)a_n x^{n-1} + (n+\sigma)a_n x^{n-1} - a_n x^n\right]$
$= x^\sigma \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+\sigma)(n+\sigma-1)a_n + (n+\sigma)a_n - a_{n-1}\right] x^{n-1} + (\sigma(\sigma-1)+\sigma)a_0 x^{\sigma-1} = 0$
Die Gleichung gilt für beliebige x. $\to$ Alle Koeffizienten der $x^{\sigma+n}$-Term müssen null sein.
$x^{\sigma-1}$-Term: $(\sigma(\sigma-1)+\sigma)a_0 = 0 \to$ wegen $a_0 \neq 0$, $\sigma = 0$
$x^{\sigma+n-1}$-Term $(n \geq 1)$: $(n+\sigma)(n+\sigma-1)a_n + (n+\sigma)a_n - a_{n-1} = 0 \to a_n = \frac{1}{(n+\sigma)^2}a_{n-1}$
Weil $\sigma = 0$, $a_n = \frac{1}{n^2}a_{n-1}$
$a_1 = a_0$, $a_2 = \frac{1}{4}a_0$, $\cdots$, $a_n = \frac{1}{(n!)^2}a_0$
Eine Lösung der Differentialgleichung ist $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}a_0 x^n$.
Anmerkung: Wenn die beiden charakteristischen Exponenten gleich sind (d.h. $\sigma^2 = 0 \to \sigma_1 = \sigma_2 = 0$), wird die zweite Lösung der Differentialgleichung gegeben, in der Form
$y_2(x) = y_1(x)\log x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+\sigma}$
Die Ersetzung in die Differentialgleichung ergibt die Lösung
$y_2(x) = y_1(x)\log x + \left(-2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{11}{108}x^3 + \cdots\right)$
Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist $y(x) = A_1 y_1(x) + A_2 y_2(x)$.

Ein kurzer Ausblick auf zukünftige Semester*: In allen Fächern der Physik werden viele Phänomene von Differentialgleichungen beschrieben. Die Eigenschaften der Differentialgleichungen werden im Rahmen des Sturm-Liouville-Problems, und des Separationsansatzes analysiert und die Greensche Funktion ist eine praktische Methode, um die Lösungen zu finden. Das Eigenwertproblem und das Spektraltheorem tauchen oft insbesondere in Quantentheorie (5. Sem) und Statistischer Physik (6. Sem) auf. Legendre-Polynome, Delta Distribution, Heaviside Funktion und andere spezielle Funktionen werden in Elektrodynamik (4. Semester) und Quantentheorie wiederkehren. Sie sind wichtige Grundlagen auch für numerische Rechnungen (wie z.B Gauß-Quadratur). Ko- und kontravariante Schreibweise werden in Elektrodynamik I & II für die spezielle Relativitätstheorie gebraucht. Die duale Basis erscheint in Form des reziproken Gitters in der Festkörperphysik (6. Sem). Die Gamma-Funktion wird in Statistischer Physik (6. Sem) eine wichtige Rolle spielen. Somit sollten die "Mathematischen Methoden" eine wichtige Grundlage für künftige theoretische Vorlesungen bieten.*