Name: Tutoriumsgruppe: Matr. Nr.:

Anzahl der abgegebenen Blätter (inkl. Deckblatt):

Mathematische Methoden der Theoretischen Physik (UE, 135.044)

1. Test, 30. 11. 2018, 2018W

1 Rechenbeispiele (30 Punkte)

(6 Punkte pro Frage)

a) Berechnen Sie

$$\frac{1}{x_k x_k}\partial_i(x_i x_j x_j)$$

für einen 3-dimensionalen Vektor $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$ in der kartesischen Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

b) Berechnen Sie

$$\partial_i \sqrt{x_j x_j}$$

für einen d-dimensionalen Vektor $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$ in der kartesischen Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_d\}$.

c) Berechnen Sie die dualen Basisvektoren $\mathbf{f}^1$ und $\mathbf{f}^2$ zur Basis $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ und $\mathbf{f}_2 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$. $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ ist die kartesische Basis.

d) Berechnen Sie $\varepsilon_{ijk} {a^i}_1 {a^j}_2 {a^k}_3$ wobei

$$\left({a^i}_j\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

e) Berechnen Sie $g^{ij} g_{ij}$. ($\mathbf{g} = (g_{kj})$ und $\mathbf{g}^* = (g^{ik})$ sind die metrischen Tensoren eines Koordinatensystems in d Dimensionen.)

BITTE WENDEN

2 Tensoren (40 Punkte)

Die Komponenten eines kontravarianten Tensors zweiter Stufe A bezüglich der kartesischen Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ lauten $a^{11} = 0$, $a^{12} = 1$, $a^{21} = 1$, $a^{22} = 0$.

a) Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 ($\lambda_2 > \lambda_1$) der Matrix

$$\begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} \\ a^{21} & a^{22} \end{pmatrix}.$$

b) $\mathbf{e}'_i$ ($i = 1, 2$) sei der Eigenvektor zum Eigenwert λ_i. Berechnen Sie die Komponenten $s^j{}_i$ der Transformationsmatrix $\mathbf{S}$ zwischen der kartesischen Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ und der Eigenbasis $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ (d.h. $\mathbf{e}'_i = s^j{}_i \mathbf{e}_j$).

c) $\mathbf{P}$ sei der Projektor auf den Eigenvektor $\mathbf{e}'_1$ und $\mathbf{Q}$ sei der Projektor auf den Eigenvektor $\mathbf{e}'_2$. Berechnen Sie die Komponenten P^{ij} und Q^{ij} bezüglich der kartesischen Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

d) Berechnen Sie die Komponenten P'^{ij} und Q'^{ij} der Projektoren bezüglich der Eigenbasis $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$.

e) Schreiben Sie die Komponenten a'^{ij} des Tensors A bezüglich der Eigenbasis $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ an.

f) Berechnen Sie die Komponenten b^{ij} des Tensors $B = e^{i\theta A}$ bezüglich der kartesischen Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ (θ : Konstante).

3 Lokale Transformation (30 Punkte)

In der kartesischen Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ist eine infinitesimale Änderung des Vektors $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$ durch $\mathbf{dx} = dx^i \mathbf{e}_i$ gegeben.

a) Mit Paraboloid-Koordinaten $(x'^1, x'^2, x'^3) = (u, v, \phi)$ und der entsprechenden Basis $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ wird die infinitesimale Änderung in die Form $\mathbf{dx} = dx'^i \mathbf{e}'_i$ umgeschrieben. Berechnen Sie die Transformationsmatrix $\mathbf{S}$ zwischen den Basisvektoren wobei $\mathbf{S} = (s^j{}_i)$ durch $\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_j s^j{}_i$ definiert ist. Die Koordinatentransformation ist durch $(x^1, x^2, x^3) = (uv\cos\phi, uv\sin\phi, (u^2 - v^2)/2)$ gegeben ($u \geq 0$, $v \geq 0$, $0 \leq \phi < 2\pi$).

b) Berechnen Sie die metrischen Tensoren $\mathbf{g}' = (g'_{ij})$ und $\mathbf{g}'^{*} = (g'^{ij})$ der Paraboloid-Koordinaten.

c) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_C \mathbf{b} \cdot \mathbf{dx}$ für $\mathbf{b}(x, y, z) = -x^2 y \mathbf{e}_1 + x^3 \mathbf{e}_2$ und $C = \{(x(u, v, \phi), y(u, v, \phi), z(u, v, \phi)) | u = 1, v = 1, 0 \leq \phi < 2\pi\}$.