Name: Tutoriumsgruppe: Matr. Nr.:
Anzahl der abgegebenen Blätter (inkl. Deckblatt):

Mathematische Methoden der Theoretischen Physik (UE, 135.044)

2. Test, 18. 1. 2019, 2018W

1 Rechenbeispiele (30 Punkte)

(6 Punkte pro Frage)

Berechnen Sie die folgenden Integrale (a-d).

a)

$$\int_0^\infty \delta(2x^2 + x - 1)\sin(\pi x)dx$$

b)

$$\int_{-\infty}^\infty f'(x)\sin x dx \qquad \text{mit} \qquad f(x) = \begin{cases} \sin|x| & (|x| \le \pi/2) \\ 0 & (|x| > \pi/2) \end{cases}$$

c)

$$\int_0^\infty x^4 e^{-x^2/2} dx$$

d)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta d\theta$$

e) Berechnen Sie den folgenden Ausdruck der verallgemeinerten Funktion

$$\frac{d^3}{dx^3}\frac{x^2}{\Gamma(3)}H(x)$$

($H(t)$: Heaviside-Funktion).

Hinweise: $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$, $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$

BITTE WENDEN

2 Greensche Funktion (30 Punkte)

Betrachten Sie einen Differentialoperator, der durch

$$\mathcal{L}_t x(t) = \left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\frac{d}{dt} + 2\right) x(t)$$

definiert ist.
a) Finden Sie die Fouriertransformation $\tilde{G}_I(\omega)$ einer Greenschen Funktion $G_I(t,t')$, die die inhomogene Differentialgleichung $\mathcal{L}_t G_I(t,t') = \delta(t-t')$ erfüllt.
b) Berechnen Sie die Greensche Funktion $G_I(t,t')$, d.h. die inverse Fouriertransformation von $\tilde{G}_I(\omega)$

$$G_I(t,t') = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_I(\omega)\, e^{i\omega(t-t')} d\omega\,.$$

Beschreiben Sie auch, wie das Integral entlang der reellen Achse mithilfe des Residuensatzes gerechnet werden kann.
c) Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung $\mathcal{L}_t x(t) = H(t)$ mit den Randbedingungen $x(t=0) = 0$ und $x'(t=0) = 0$ ($H(t)$: Heaviside-Funktion).

3 Differentialgleichung (40 Punkte)

a) Führen Sie den Separationsansatz $\Phi(u,v) = P(u)Q(v)$ der Differentialgleichung

$$8uv\partial_v^2\Phi(u,v) + 3u^2v^{-1}\partial_u\Phi(u,v) + 6u\partial_v\Phi(u,v) + uv^{-1/2}\Phi(u,v) = 0$$

durch und schreiben Sie die Differentialgleichungen der u-Koordinate und der v-Koordinate an ($u, v > 0$).
b) Zeigen Sie, dass bei der Koordinatentransformation $v = x^2$ und $Q(v) = y(x)$ die Differentialgleichung der v-Koordinate in die Form

$$2x^2\partial_x^2 y(x) + x\partial_x y(x) + (x+Z)y(x) = 0$$

umgeschrieben wird (Z : Konstante).
c) Verwenden Sie den Ansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\sigma}$ ($a_0 \neq 0$) und bestimmen Sie die charakteristischen Exponenten σ der Differentialgleichung aus b) für $Z = 0$.
d) Lösen Sie die Differentialgleichung aus b) für $Z = 0$ mithilfe der Frobenius-Methode und zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung durch

$$y(x) = A\cos(\sqrt{2x}) + B\sin(\sqrt{2x})$$

gegeben ist (A, B : Konstante).