1. Tutorium - Lösungen **12.10.2018**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel anzuschauen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

1.1 Indexschreibweise

Vorbemerkung: Beachte, dass hier die folgende Schreibweise verwendet wird: "$\mathbf{A} = (a_{ij})$"

Die Matrix $\mathbf{A}$ hat in drei Dimensionen neun Einträge: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Die i-te Zeile und die j-te Spalte der Matrix lässt sich sauber so darstellen: $(\mathbf{A})_{ij} = a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{ij}$,

also $(\mathbf{A})_{11} = a_{11}$, $(\mathbf{A})_{12} = a_{12}$, etc. Wenn es nur zwei freie Indizes gibt, und auch keine Gefahr der Vertauschung besteht (etwa wegen alphabetischer Reihenfolge der Indizes), wird das zuweilen verkürzt zu $\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

a) $a_{ij}b_{jk} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}b_{jk} = (\mathbf{AB})_{ik} = \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}_{ik}$

b) $a_{ij}b_{ik} = (\mathbf{A}^T\mathbf{B})_{jk} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{jk} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}_{jk}$

c) $a_{ij}b_{ij} = (\mathbf{A}^T\mathbf{B})_{jj} = \mathrm{Tr}(\mathbf{A}^T\mathbf{B}) = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 3$

d) $(\mathbf{A}^T\mathbf{B}^T\mathbf{C}^T\mathbf{D})_{im} = (\mathbf{A}^T)_{ij}(\mathbf{B}^T)_{jk}(\mathbf{C}^T)_{k\ell}(\mathbf{D})_{\ell m} = a_{ji}b_{kj}c_{\ell k}d_{\ell m}$

e) $a_{km}b_{li}c_{ki}d_{lm} = a_{km}c_{ki}b_{\ell i}d_{\ell m} = (\mathbf{A}^T)_{mk}(\mathbf{C})_{ki}(\mathbf{B}^T)_{i\ell}(\mathbf{D})_{\ell m} = (\mathbf{A}^T\mathbf{C}\mathbf{B}^T\mathbf{D})_{mm} = \mathrm{Tr}(\mathbf{A}^T\mathbf{C}\mathbf{B}^T\mathbf{D})$
$(= \mathrm{Tr}(\mathbf{C}\mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{A}^T) = \mathrm{Tr}(\mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{A}^T\mathbf{C}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{D}\mathbf{A}^T\mathbf{C}\mathbf{B}^T) = \mathrm{Tr}(\mathbf{D}^T\mathbf{B}\mathbf{C}^T\mathbf{A}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{B}\mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{D}^T) = \mathrm{Tr}(\mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{D}^T\mathbf{B}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{D}^T\mathbf{B}\mathbf{C}^T))$

1.2 Skalarprodukt

a) Wenn $k = \ell$, $\frac{1}{L}\int_0^L e^{i(\lambda_\ell - \lambda_k)x}dx = \frac{1}{L}\int_0^L dx = 1$

Wenn $k \neq \ell$, $\frac{1}{L}\int_0^L e^{i(\lambda_\ell - \lambda_k)x}dx = \frac{1}{L}\int_0^L e^{2\pi i(\ell-k)x/L}dx = \frac{1}{2\pi i(\ell-k)} e^{2\pi i(\ell-k)x/L}\Big|_{x=0}^{L}$
$= \frac{1}{2\pi i(\ell-k)}\left(e^{2\pi i(\ell-k)} - 1\right) = 0 \quad (\ell - k\text{: ganze Zahl})$

b) Skalarprodukt :
$\langle f|g\rangle = \frac{1}{L}\int_0^L \overline{f(x)}g(x)dx = \frac{1}{L}\int_0^L \sum_{k=1}^N\sum_{\ell=1}^N \overline{a_k}b_\ell e^{i(\lambda_\ell-\lambda_k)x}dx = \sum_{k=1}^N\sum_{\ell=1}^N \overline{a_k}b_\ell \frac{1}{L}\int_0^L e^{2\pi i(\ell-k)x/L}dx$
$= \sum_{k=1}^N\sum_{\ell=1}^N \overline{a_k}b_\ell\delta_{\ell k} = \sum_{k=1}^N \overline{a_k}b_k$

1.3 Lineare Unabhängigkeit

a) Wenn $a_1p_1(x) + a_2p_2(x) + a_3p_3(x) = 0$ eine einzige Lösung $a_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ hat, ist die Familie $\mathcal{P}$ linear unabhängig.

$a_1p_1(x)+a_2p_2(x)+a_3p_3(x) = a_1+a_2\sqrt{3/2}x+a_3\sqrt{5/8}(3x^2-1) = a_1-\sqrt{5/8}a_3+\sqrt{3/2}a_2x+3\sqrt{5/8}a_3x^2 = 0$
x^2-Term : $3\sqrt{5/8}a_3 = 0 \to a_3 = 0$
x-Term : $\sqrt{3/2}a_2 = 0 \to a_2 = 0$
x^0-Term : $a_1 - \sqrt{5/8}a_3 = 0$. Da $a_3 = 0$, $a_1 = 0$.
Die Familie $\mathcal{P}$ ist linear unabhängig.
Alternative Lösung:

$$a_1p_1(x)+a_2p_2(x)+a_3p_3(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) & p_3(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{5/8} \\ 0 & \sqrt{3/2} & 0 \\ 0 & 0 & 3\sqrt{5/8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{5/8} \\ 0 & \sqrt{3/2} & 0 \\ 0 & 0 & 3\sqrt{5/8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{5/8} \\ 0 & \sqrt{3/2} & 0 \\ 0 & 0 & 3\sqrt{5/8} \end{pmatrix} = (3/4)\sqrt{15} \neq 0$, $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{5/8} \\ 0 & \sqrt{3/2} & 0 \\ 0 & 0 & 3\sqrt{5/8} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Wenn $b_1q_1(x) + b_2q_2(x) + b_3q_3(x) = 0$ eine einzige Lösung $b_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ hat, ist die Familie $\mathcal{Q}$ linear unabhängig.

$$\begin{pmatrix} \sqrt{1/2} & -\sqrt{1/2} & -\sqrt{5/8} \\ \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3\sqrt{5/8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $\det \begin{pmatrix} \sqrt{1/2} & -\sqrt{1/2} & -\sqrt{5/8} \\ \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3\sqrt{5/8} \end{pmatrix} = (3/2)\sqrt{15/2} \neq 0 \to \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Familie $\mathcal{Q}$ ist linear unabhängig.

c) $a_1p_1(x) + a_2p_2(x) + a_3p_3(x) - b_1q_1(x) - b_2q_2(x) - b_3q_3(x) = 0$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{5/8} \\ 0 & \sqrt{3/2} & 0 \\ 0 & 0 & 3\sqrt{5/8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{1/2} & -\sqrt{1/2} & -\sqrt{5/8} \\ \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3\sqrt{5/8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{5/8} \\ 0 & \sqrt{3/2} & 0 \\ 0 & 0 & 3\sqrt{5/8} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{1/2} & -\sqrt{1/2} & -\sqrt{5/8} \\ \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3\sqrt{5/8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & \sqrt{2/3} & 0 \\ 0 & 0 & (1/3)\sqrt{8/5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1/2} & -\sqrt{1/2} & -\sqrt{5/8} \\ \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3\sqrt{5/8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{1/2} & -\sqrt{1/2} & 0 \\ \sqrt{1/2} & \sqrt{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Alternative:
$q_1(x) = \sqrt{1/2}p_1(x) + \sqrt{1/2}p_2(x)$, $q_2(x) = -\sqrt{1/2}p_1(x) + \sqrt{1/2}p_2(x)$, $q_3(x) = p_3(x)$,

$$\to \begin{pmatrix} q_1(x) & q_2(x) & q_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) & p_3(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1/2} & -\sqrt{1/2} & 0 \\ \sqrt{1/2} & \sqrt{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F(x) = \begin{pmatrix} q_1(x) & q_2(x) & q_3(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) & p_3(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1/2} & -\sqrt{1/2} & 0 \\ \sqrt{1/2} & \sqrt{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Da die Familie $\mathcal{P}$ linear unabhängig ist, $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1/2} & -\sqrt{1/2} & 0 \\ \sqrt{1/2} & \sqrt{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$