2. Tutorium **für 19.10.2018**

2.1 Kronecker-Delta

a) Berechne $\delta_{ii} + \delta_{ij}\delta_{ji} - \delta_{ii}\delta_{jj}$ mit dem Kronecker-Delta in d Dimensionen.
b) Berechne $x_i x_j \delta_{ji}$ für den Vektor $\mathbf{x} = (1, 1, 1)$ in einem Orthonormalsystem.
c) Berechne $a_{ij}a_{ik}\delta_{jk}$ für die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ in einem Orthonormalsystem.

2.2 Transformationsmatrix

Die Koordinaten eines Vektors $\mathbf{x}$ sind in einer orthonormalen Basis, $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, durch $\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\,\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$ gegeben. Der Vektor wird in einer anderen Basis $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ durch $\mathbf{x} = x'^1\mathbf{e}'_1 + x'^2\,\mathbf{e}'_2$ dargestellt. Für beliebige Koordinaten (x^1, x^2) sind die neuen Koordinaten durch $x'^1 = (1/2)(x^1 + \sqrt{3}x^2)$ und $x'^2 = (1/2)(-\sqrt{3}x^1 + x^2)$ definiert.
a) Schreibe die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ zwischen den Koordinaten an. Die Matrix $\mathbf{T}$ ist durch

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

definiert.
b) $\mathbf{e}_i$ und $\mathbf{e}'_i$ $(i = 1, 2)$ seien Spaltenvektoren. Die Transformationsmatrix $\mathbf{S}$ zwischen den Basen ist durch

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \mathbf{S}$$

definiert. Zeige, dass $\mathbf{S} = \mathbf{T}^{-1}$ und berechne die Matrix $\mathbf{S}$.
c) Zeige, dass die neue Basis $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ orthonormal (d.h. $\langle \mathbf{e}'_i | \mathbf{e}'_j \rangle = \delta_{ij}$) ist.
d) Der Vektor $\mathbf{x} = x'^1\mathbf{e}'_1 + x'^2\,\mathbf{e}'_2$ wird in noch einer anderen Basis $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$, durch $\mathbf{x} = x''^1\mathbf{f}_1 + x''^2\,\mathbf{f}_2$ dargestellt. Die neuen Koordinaten sind durch $x''^1 = (1/2)(x'^1 + \sqrt{3}x'^2)$ und $x''^2 = (1/2)(x'^1 - \sqrt{3}x'^2)$ definiert. Berechne die Transformationsmatrix $\mathbf{S}_f$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} \mathbf{S}_f$$

und überprüfe die Orthonormalität der Basis $\mathbf{f}_i$ $(i = 1, 2)$.
e) Berechne das Skalarprodukt $\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle$ in allen drei Koordinaten (x^1, x^2), (x'^1, x'^2) und (x''^1, x''^2).

2.3 Duale Basis

Die duale Basis $\{\mathbf{f}_1^*, \mathbf{f}_2^*\} := \{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2\}$ wird über $[\mathbf{f}_i^*, \mathbf{f}_j] = \mathbf{f}_i^* \cdot \mathbf{f}_j = \delta_{ij}$ bzw. $[\mathbf{f}^i, \mathbf{f}_j] = \mathbf{f}^i \cdot \mathbf{f}_j = \delta_j^i$ definiert. Der Vektor $\mathbf{x} = x''^i \mathbf{f}_i$ wird in der dualen Basis mit $\mathbf{x} = x''_i \mathbf{f}^i$ dargestellt.
a) Bestimme die dualen Basisvektoren $\{\mathbf{e}'^1, \mathbf{e}'^2\}$ zur Basis $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ aus Bsp.2.2.
b) Bestimme die dualen Basisvektoren $\{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2\}$ zur Basis $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ aus Bsp.2.2 und schreibe die Transformationsmatrizen $\mathbf{S}_f^*$ und $\mathbf{T}_f^*$, wobei

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix} = \mathbf{S}_f^* \begin{pmatrix} \mathbf{e}'^1 \\ \mathbf{e}'^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x''_1 & x''_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 \end{pmatrix} \mathbf{T}_f^* .$$

c) Berechne das Skalarprodukt $x''_i x''^i$ und zeige, dass gilt $x''_i x''^i = x'_i x'^i$.

Ankreuzbar: 1a-c, 2a-c, 2d, 2e, 3ab, 3c