3. Tutorium **für 9.11.2018**

3.1 Levi-Civita Symbol

Das Levi-Civita Symbol:

$$\varepsilon_{ijk\ldots} = \begin{cases} +1 & \text{falls } (i,j,k,\cdots) \text{ eine gerade Permutation von } (1,2,3,\cdots) \text{ ist,} \\ -1 & \text{falls } (i,j,k,\cdots) \text{ eine ungerade Permutation von } (1,2,3,\cdots) \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Gegeben seien 2 Vektoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, in einem kartesischen Koordinatensystem. Berechne $\varepsilon_{ijk} a_j b_k$.

b) Gegeben sei zusätzlich $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechne $\varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$.

c) Berechne $\varepsilon_{ijk} x_i x_j$ für einen beliebigen Vektor $\mathbf{x}$.

d) Gegeben sei eine 3×3-Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$. Schreibe mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols die Determinante $\det\mathbf{A}$ in Indexschreibweise.

e) Zeige $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$ durch repräsentatives Einsetzen von Zahlen in die Indizes (Einsteinsche Summenkonvention beachten).

3.2 Orthogonalprojektion

a) Gegeben sei ein Vektor $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ in einem kartesischen Koordinatensystem. Schreibe den zugehörigen Projektor $\mathbf{E_a}$ als eine 2×2 Matrix an.

b) Berechne ${\mathbf{E_a}}^n$.

c) $\mathbf{E_b}$ ist der Orthogonalprojektor auf den Vektor $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Berechne $\mathbf{E_a} + \mathbf{E_b}$.

d) Berechne $\mathbf{E_b}(\mathbf{1}+\mathbf{E_a})\mathbf{E_a}(\mathbf{1}+\mathbf{E_a})^2\mathbf{x}$ für einen beliebigen Vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$.

e) Der Vektor $\mathbf{x}$ wird in der orthogonalen Basis $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ mit $\mathbf{x} = x'^1\mathbf{f}_1 + x'^2\mathbf{f}_2$ dargestellt. Berechne die Koordinaten x'^1 und x'^2.

3.3 Spektraltheorem

a) Berechne die Eigenwerte λ_1, λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$) und die normierten Eigenvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

b) $\mathbf{E}_i$ seien die Orthogonalprojektoren auf den Eigenvektor $\mathbf{e}_i$. Zeige $\mathbf{A} = \sum_i \lambda_i \mathbf{E}_i$.

c) Berechne den Vektor $\mathbf{x} = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}_0$ für $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

d) Berechne $\frac{d}{dt} x_i$ und zeige, dass gilt

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}\,.$$

Ankreuzbar: 1a-c, 1de, 2ab, 2c-e, 3ab, 3cd