3. Tutorium - Lösungen **9.11.2018**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel anzuschauen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

3.1 Levi-Civita Symbol

a) $x_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$
z.B. $x_1 = \varepsilon_{1jk} a_j b_k = \varepsilon_{123} a_2 b_3 + \varepsilon_{132} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2$
$\to \varepsilon_{ijk} a_j b_k = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i \to \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$
b) $\varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_k c_k = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ $(= (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}) = -1$
c) $\underbrace{\varepsilon_{ijk} x_i x_j}_{\text{Umbenennung der Indizes } i \leftrightarrow j} = \varepsilon_{jik} \underbrace{x_j x_i}_{x_j x_i = x_i x_j} = \underbrace{\varepsilon_{jik}}_{\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ijk}} x_i x_j = -\varepsilon_{ijk} x_i x_j \to \varepsilon_{ijk} x_i x_j = 0$
Alternative Lösung : $\varepsilon_{ijk} x_i x_j = (\mathbf{x} \times \mathbf{x})_k = 0$
d) $\det\mathbf{A} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$
$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{21}(a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})$
$= \varepsilon_{1jk} a_{11} a_{j2} a_{k3} + \varepsilon_{2jk} a_{21} a_{j2} a_{k3} + \varepsilon_{3jk} a_{31} a_{j2} a_{k3} = \varepsilon_{ijk} a_{i1} a_{j2} a_{k3}$ $(= (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}_3)$
e) i) Wenn $i = j$: $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = 0$. $\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} = \delta_{il}\delta_{im} - \delta_{im}\delta_{il}$ (ohne Summe über i)
Wenn $l = m = i$, $\delta_{il}\delta_{im} - \delta_{im}\delta_{il} = 1 - 1 = 0$ und sonst, $\delta_{il}\delta_{im} - \delta_{im}\delta_{il} = 0 - 0 = 0$
ii) Wenn $i \neq j$: In der Summe über k trägt $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}$ nur 1 Term ($k \neq i$ und $k \neq j$) bei.
ii-a) Wenn $l = i$ und $m = j$ (z.B. $i = l = 1$, $j = m = 2$, $k = 3$): $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kij} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 1$
$\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} = \delta_{ii}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{ji} = 1$ (ohne Einsteinsche Summenkonvention)
ii-b) Wenn $l = j$ und $m = i$ (z.B. $i = m = 1$, $j = l = 2$, $k = 3$): $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = -1$
$\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} = \delta_{ij}\delta_{ji} - \delta_{ii}\delta_{jj} = -1$ (ohne Einsteinsche Summenkonvention)
ii-c) Sonst ($l = m$ und/oder $l = k$ und/oder $m = k$): $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = 0$ und $\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} = 0$
Alternative Lösung:
$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{abk}\delta_{ai}\delta_{bj}$ (d.h. $\varepsilon_{ijk} = (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j)_k$ mit $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, und $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$)
und $\varepsilon_{klm} = \varepsilon_{lmk} = \varepsilon_{cdk}\delta_{cl}\delta_{dm} \to \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \varepsilon_{abk}\delta_{ai}\delta_{bj}\varepsilon_{cdk}\delta_{cl}\delta_{dm} = \varepsilon_{abk}\varepsilon_{cdk}\delta_{ai}\delta_{bj}\delta_{cl}\delta_{dm}$
Wenn $c = a$ und $d = b (\neq a)$, $\varepsilon_{abk}\varepsilon_{cdk} = \varepsilon_{abk}\varepsilon_{abk} = 1$. (Summe über k aber nicht über a und b)
Wenn $c = b$ und $d = a$, $\varepsilon_{abk}\varepsilon_{cdk} = \varepsilon_{abk}\varepsilon_{bak} = -1$. (Summe über k aber nicht über a und b)
Sonst $\varepsilon_{abk}\varepsilon_{cdk} = 0$. $\to \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{ia}\delta_{jb}\delta_{la}\delta_{mb} - \delta_{ia}\delta_{jb}\delta_{lb}\delta_{ma} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$

3.2 Orthogonalprojektion

a) $\mathbf{E_a} = \frac{\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a}} = \frac{1}{1+4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
b) $\mathbf{E_a}^2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{E}_a$
$\mathbf{E_a}^3 = \mathbf{E_a}^2 \mathbf{E_a} = \mathbf{E_a}\mathbf{E_a} = \mathbf{E_a}$
Wenn $\mathbf{E_a}^n = \mathbf{E_a}$, $\mathbf{E_a}^{n+1} = \mathbf{E_a}^n \mathbf{E_a} = \mathbf{E_a}^2 = \mathbf{E_a}$.
c) $\mathbf{E_b} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \to \mathbf{E_a} + \mathbf{E_b} = \mathbf{1}$.
d) $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = 0$. Wenn die Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ orthogonal sind, gilt $\mathbf{E_b}\mathbf{E_a} = \mathbf{0}$.
$\mathbf{E_b}(\mathbf{1} + \mathbf{E_a})\mathbf{E_a}(\mathbf{1} + \mathbf{E_a})^2 = \underbrace{\mathbf{E_b}\mathbf{E_a}}_{=0}(\mathbf{1} + \mathbf{E_a})^3 = \mathbf{0}$ (Da $[\mathbf{1}, \mathbf{E_a}] = 0$ und $[\mathbf{E_a}, \mathbf{E_a}] = 0$, $(\mathbf{1} + \mathbf{E_a})\mathbf{E_a} = \mathbf{E_a}(\mathbf{1} + \mathbf{E_a})$)

$\mathbf{E_b}(\mathbf{1}+\mathbf{E_a})\mathbf{E_a}(\mathbf{1}+\mathbf{E_a})^2\mathbf{x}=0$
e)

$$\mathbf{x}=\underbrace{\mathbf{E_a}\mathbf{x}+\mathbf{E_b}\mathbf{x}}_{\mathbf{E_a}+\mathbf{E_b}=\mathbf{1}(\text{Bsp.c})}=\frac{\mathbf{f}_1\otimes\mathbf{f}_1^T}{\mathbf{f}_1^T\cdot\mathbf{f}_1}\mathbf{x}+\frac{\mathbf{f}_2\otimes\mathbf{f}_2^T}{\mathbf{f}_2^T\cdot\mathbf{f}_2}\mathbf{x}=\frac{\mathbf{f}_1^T\cdot\mathbf{x}}{\mathbf{f_1}^T\cdot\mathbf{f}_1}\mathbf{f}_1+\frac{\mathbf{f}_2^T\cdot\mathbf{x}}{\mathbf{f}_2^T\cdot\mathbf{f}_2}\mathbf{f}_2=\frac{x^1+2x^2}{5}\mathbf{f}_1+\frac{2x^1-x^2}{5}\mathbf{f}_2$$

Anmerkung

Im Allgemeinen werden die Projektoren mit $\mathbf{E_i}=\mathbf{f}_i\otimes\mathbf{f}^i$ (ohne Summe über i) dargestellt. (Für orthogonale Basen ist der duale Vektor durch $\mathbf{f}^i=\frac{\mathbf{f}_i^T}{\mathbf{f}_i^T\cdot\mathbf{f}_i}$ gegeben und die Projektoren $\mathbf{E_i}$ sind die Orthogonalprojektoren.) Die Koordinate x'^i ist die Projektion von $\mathbf{x}$ auf $\mathbf{f}^i$, d.h. $\mathbf{f}^i\cdot\mathbf{x}=\mathbf{f}^i\cdot x'^j\mathbf{f}_j=x'^j\delta^i{}_j=x'^i$. Entsprechend wird die Transformationsmatrix zwischen Koordinaten x^i und x'^i durch $\mathbf{T}=\begin{pmatrix}\mathbf{f}^1\\ \mathbf{f}^2\end{pmatrix}$ gegeben wenn der Vektor $\mathbf{f}^i$ in der Basis $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$ dargestellt ist.

Alternative :

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'^1\\ x'^2\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{pmatrix}}_{=\mathbf{1}(\text{kartesische Basis})}\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}x'^1\\ x'^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}x^1+2x^2\\ 2x^1-x^2\end{pmatrix}$$

Alternative Lösung für 3.2

Projektor auf den Vektor $\mathbf{f}_1=\mathbf{a}$ in der Basis $\{\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2\}$: $\mathbf{E_a}'=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

Basis-Transformationsmatrix $\mathbf{S}=\begin{pmatrix}\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

Projektor in der kartesischen Basis : $\mathbf{E_a}=\mathbf{S}^*\mathbf{E_a}'\mathbf{S}=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{E_a}'\mathbf{S}$

$\mathbf{E_a}^n=(\mathbf{S}^*\mathbf{E_a}'\mathbf{S})^n=\mathbf{S}^*(\mathbf{E_a}')^n\mathbf{S}=\mathbf{S}^*\mathbf{E_a}'\mathbf{S}=\mathbf{E_a}\quad\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]$

$\mathbf{E_b}=\mathbf{S}^*\mathbf{E_b}'\mathbf{S}$ mit $\mathbf{E_b}'=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$\mathbf{E_a}+\mathbf{E_b}=\mathbf{S}^*(\mathbf{E_a}'+\mathbf{E_b}')\mathbf{S}=\mathbf{S}^*\mathbf{1}\mathbf{S}=\mathbf{S}^*\mathbf{S}=\mathbf{1}$

3.3 Spektraltheorem

a) Säkulardeterminante : $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\det\begin{vmatrix}-\lambda & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(1-\lambda)-2=(\lambda+1)(\lambda-2)=0\to\lambda_{1,2}=2,-1$

Eigenvektoren : $\mathbf{Ae}=\mathbf{A}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}b\\ \sqrt{2}a+b\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}\sqrt{2}b\\ \sqrt{2}a+b\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\sqrt{2}b^2-\sqrt{2}a^2-ab=(\sqrt{2}b+a)(b-\sqrt{2}a)=0\to b=\sqrt{2}a,-(1/\sqrt{2})a$

Wenn $b=\sqrt{2}a$, $\mathbf{Ae}=\begin{pmatrix}2a\\ 2\sqrt{2}a\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$. Da der Eigenwert $\lambda_1=2$, $\mathbf{e}_1=\begin{pmatrix}a\\ \sqrt{2}a\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$

Wenn $a=-\sqrt{2}b$, $\mathbf{Ae}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}b\\ -b\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$. Da der Eigenwert $\lambda_2=-1$, $\mathbf{e}_2=\begin{pmatrix}-\sqrt{2}b\\ b\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}$

b) $\sum_i\lambda_i\mathbf{E}_i\mathbf{e}_j=\lambda_j\mathbf{e}_j$ (ohne Summe über j)

$\to\sum_i\lambda_i\mathbf{E}_i\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1\mathbf{e}_1 & \lambda_2\mathbf{e}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$

$\to\sum_i\lambda_i\mathbf{E}_i=\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{pmatrix}^{-1}$

$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$

Alternative Lösung:

$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$

$\sum_i \lambda_i \mathbf{E}_i = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{A}^2 = \sum_i \lambda_i \mathbf{E}_i \sum_j \lambda_j \mathbf{E}_j = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \mathbf{E}_i \mathbf{E}_j = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \mathbf{E}_i \delta_{ij} = \sum_i \lambda_i^2 \mathbf{E}_i$

$\mathbf{A}^3 = \sum_i \lambda_i^2 \mathbf{E}_i \sum_j \lambda_j \mathbf{E}_j = \sum_{i,j} \lambda_i^2 \lambda_j \mathbf{E}_i \mathbf{E}_j = \sum_{i,j} \lambda_i^2 \lambda_j \mathbf{E}_i \delta_{ij} = \sum_i \lambda_i^3 \mathbf{E}_i$

$\vdots$

$\mathbf{A}^n = \sum_i \lambda_i^{n-1} \mathbf{E}_i \sum_j \lambda_j \mathbf{E}_j = \sum_{i,j} \lambda_i^{n-1} \lambda_j \mathbf{E}_i \delta_{ij} = \sum_i \lambda_i^n \mathbf{E}_i\,.$

$\exp(\mathbf{A}t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\mathbf{A}^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_i \lambda_i^n \mathbf{E}_i = \sum_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_i t)^n}{n!}\mathbf{E}_i = \sum_i \exp(\lambda_i t)\mathbf{E}_i$

$\mathbf{x} = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}_0 = \sum_i \exp(\lambda_i t)\mathbf{E}_i\mathbf{x}_0 = \exp(\lambda_1 t)\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{x}_0) + \exp(\lambda_2 t)\mathbf{e}_2(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{x}_0) = \sqrt{3}\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\sqrt{2}-1)\exp(\lambda_1 t) \\ (\sqrt{2}+1)\exp(\lambda_2 t) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} (\sqrt{2}-1)\exp(\lambda_1 t) - \sqrt{2}(\sqrt{2}+1)\exp(\lambda_2 t) \\ \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)\exp(\lambda_1 t) + (\sqrt{2}+1)\exp(\lambda_2 t) \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\exp(\lambda_1 t) \\ b\exp(\lambda_2 t) \end{pmatrix}$ mit $a = \sqrt{3}(\sqrt{2}-1)$ und $b = \sqrt{3}(\sqrt{2}+1)$.

$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\lambda_1\exp(\lambda_1 t) \\ b\lambda_2\exp(\lambda_2 t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\exp(\lambda_1 t) \\ b\exp(\lambda_2 t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mathbf{e}_1 & \lambda_2\mathbf{e}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\exp(\lambda_1 t) \\ b\exp(\lambda_2 t) \end{pmatrix}$

$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}\mathbf{e}_1 & \mathbf{A}\mathbf{e}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\exp(\lambda_1 t) \\ b\exp(\lambda_2 t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mathbf{e}_1 & \lambda_2\mathbf{e}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\exp(\lambda_1 t) \\ b\exp(\lambda_2 t) \end{pmatrix}$

$\rightarrow \frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$

Alternative :

$\mathbf{x} = \sum_i \exp(\lambda_i t)\mathbf{E}_i\mathbf{x}_0 \rightarrow \frac{d}{dt}\mathbf{x} = \sum_i \lambda_i \exp(\lambda_i t)\mathbf{E}_i\mathbf{x}_0$

$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\sum_i \exp(\lambda_i t)\mathbf{E}_i\mathbf{x}_0 = \sum_i \exp(\lambda_i t)(\mathbf{A}\mathbf{E}_i)\mathbf{x}_0 = \sum_i \exp(\lambda_i t)\lambda_i\mathbf{E}_i\mathbf{x}_0 = \frac{d}{dt}\mathbf{x}$