4. Tutorium **für 16.11.2018**

4.1 Differentialoperatoren

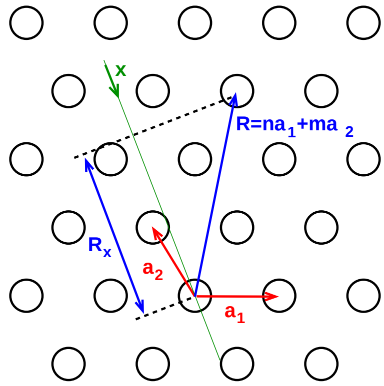
Ein 3-dimensionaler Vektor sei mit $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$ in der orthonormalen Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ dargestellt.
a) Berechne für $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ den Ausdruck $\partial_i(x_k x_k) + \partial_k(x_i x_k)$.
b) Berechne $\partial_i x_i \sqrt{x_k x_k}$.
c) Berechne $\mathbf{x} \cdot \mathrm{rot}(\mathbf{x})$
d) Berechne $\mathrm{rot}(\mathbf{p} \times \mathbf{x})$, wobei $\mathbf{p} = p_i \mathbf{e}_i$ ein konstanter Vektor ist.

4.2 Reziprokes Gitter und metrischer Tensor

Gegeben sei ein Kristallgitter mit Basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$. In der kartesischen Basis sind die Basisvektoren durch

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Die Basisvektoren des reziproken Gitters $\mathbf{b}^1$, $\mathbf{b}^2$ sind einfach die Basisvektoren des Dualraumes $\mathcal{B}^*$, d.h. $\{\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2\} = \{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2\}$.



a) Schreibe die Fläche der primitiven Einheitszelle des Kristallgitters an. (Die Einheitszelle ist das von den Basisvektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ eines Kristallgitters gebildete Parallelogramm.)
b) Bestimme die Basisvektoren $\mathbf{b}^1$, $\mathbf{b}^2$ im dualen Raum.
c) Berechne den metrischen Tensor $\mathbf{g} = (g_{ij})$ für die Basis $\mathcal{B}$.
d) Ein beliebiger Vektor ist in der Basis $\mathcal{B}$ mit $\mathbf{x} = x^1 \mathbf{a}_1 + x^2 \mathbf{a}_2$ dargestellt. Berechne die Koordinaten x_i des Vektors $\mathbf{x}$ im dualen Raum.
e) Berechne die Länge $|\mathbf{x}|$ für $x^1 = -k/\sqrt{10}$ und $x^2 = k/\sqrt{5}$ $(k > 0)$.
f) Der Vektor zwischen 2 beliebigen Atomen wird in der Basis $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ mit $\mathbf{R} = n\mathbf{a}_1 + m\mathbf{a}_2$ (n, m: Ganzzahlen) dargestellt. Zeige, dass gilt $R_x = (1/|\mathbf{x}|)(nx_1 + mx_2)$, wobei $R_x = |\mathbf{E}_\mathbf{x}\mathbf{R}|$ mit dem orthogonalen Projektor $\mathbf{E}_\mathbf{x}$ auf den Vektor $\mathbf{x}$.

4.3 Lokale Transformation

Betrachte eine infinitesimale Änderung $\mathbf{dx} = dx^i \mathbf{e}_i$ des Vektors $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$ wobei $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$ die kartesischen Basisvektoren sind. Eine lokale Transformation ist die linearisierte Basistransformation der infinitesimalen Änderung, d.h. $\mathbf{dx} = dx^i \mathbf{e}_i = dx'^i \mathbf{e}'_i$. Beantworte die folgenden Fragen für die Transformation zu den ebenen parabolischen Koordinaten $x'^1 = u$, $x'^2 = v$. Die Transformation zwischen kartesischen und ebenen parabolischen Koordinaten ist gegeben durch

$$x^1 = x(u,v) = (u^2 - v^2)/2, \; x^2 = y(u,v) = uv \qquad (-\infty < u < \infty\,,\, v \geq 0)\,.$$

a) Schreibe die Transformationsmatrix $\mathbf{S}$ der Basisvektoren an, wobei $\mathbf{e}'_i = s^j{}_i \mathbf{e}_j$.
b) Skizziere die zwei Koordinatenlinien $u = 1$ und $v = 2$ graphisch in der xy-Ebene. Zeichne die Basisvektoren $\mathbf{e}'_1$ und $\mathbf{e}'_2$ an den Punkt $(u,v) = (1,2)$ ein.
c) Berechne die Elemente g'_{ij} und g'^{ij} der metrischen Tensoren der ebenen parabolischen Koordinaten.
d) Berechne das Kurvenintegral $\int_C \mathbf{b} \cdot \mathbf{dx}$ für $\mathbf{b}(x,y) = (x - \sqrt{x^2+y^2})\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ und $C = \{(x(u,v), y(u,v)) | u = 1, 1 \leq v \leq 3\}$.

Ankreuzbar: 1a-d, 2ab, 2cd, 2ef, 3ab, 3cd