4. Tutorium - Lösungen **16.11.2018**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel anzuschauen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

4.1 Differentialoperatoren

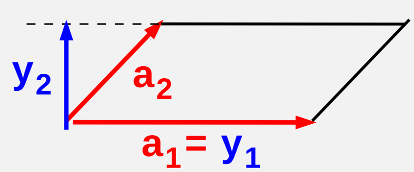
a) $\partial_i(x_k x_k) + \partial_k(x_i x_k) = (\partial_i x_k)x_k + x_k(\partial_i x_k) + (\partial_k x_i)x_k + x_i(\partial_k x_k) = \delta_{ik}x_k + x_k\delta_{ik} + \delta_{ki}x_k + x_i\delta_{kk}$
$= x_i + x_i + x_i + 3x_i = 6x_i$
b) $\sqrt{x_k x_k} = \sqrt{x_1 x_1 + x_2 x_2 + \cdots} \neq \sqrt{x_1 x_1} + \sqrt{x_2 x_2} + \cdots$
$\to \partial_i \sqrt{x_k x_k} = \frac{1}{2\sqrt{x_j x_j}} \partial_i(x_k x_k) \neq (\partial_i \sqrt{x_k})\sqrt{x_k} + \sqrt{x_k}(\partial_i \sqrt{x_k})$
$\partial_i(x_i \sqrt{x_k x_k}) = (\partial_i x_i)\sqrt{x_k x_k} + x_i(\partial_i \sqrt{x_k x_k}) = \delta_{ii}\sqrt{x_k x_k} + x_i \frac{1}{2\sqrt{x_j x_j}} \partial_i(x_k x_k)$
$= 3\sqrt{x_k x_k} + x_i \frac{1}{\sqrt{x_j x_j}} x_i = 4|\mathbf{x}|$
c) $\mathbf{x} \cdot \mathrm{rot}(\mathbf{x}) = x_i(\mathrm{rot}(\mathbf{x}))_i = x_i \varepsilon_{ijk}\partial_j x_k = x_i \varepsilon_{ijk}\delta_{jk} = 0$ (da antisymmetrisch $\times$ symmetrisch ($j \leftrightarrow k$))
d) $(\mathrm{rot}(\mathbf{p} \times \mathbf{x}))_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j(\mathbf{p} \times \mathbf{x})_k = \varepsilon_{ijk}\partial_j \varepsilon_{k\ell m} p_\ell x_m = \underbrace{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{k\ell m}}_{\delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell}} \delta_{jm} p_\ell = (\delta_{i\ell}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{j\ell})p_\ell$
$= (3\delta_{i\ell} - \delta_{i\ell})p_\ell = 2\delta_{i\ell}p_\ell = 2p_i \to \mathrm{rot}(\mathbf{p} \times \mathbf{x}) = 2\mathbf{p}$

4.2 Reziprokes Gitter und metrischer Tensor

a) Fläche : $A = \left|\det\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2}$ (oder $A = |\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2| = \sqrt{2}$)

Anmerkung: Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren

$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & (\mathbf{1} - \mathbf{E}_{\mathbf{a}_1})\mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{aS}$
mit $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2/|\mathbf{a}_1|^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}$
Fläche : $A = |\mathbf{y}_1||\mathbf{y}_2| = \sqrt{\det(\mathbf{y}^\dagger \mathbf{y})} = |\det(\mathbf{y})| = |\det(\mathbf{aS})|$
$= |\det(\mathbf{a})| \underbrace{|\det(\mathbf{S})|}_{=1} = |\det(\mathbf{a})|$
Anwendbar für n-dimensionalen Parallelepipede

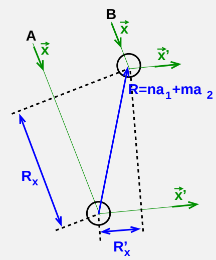


b) $\mathbf{b}^1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0 \to \mathbf{b}^1 = \lambda(1\ 1)$. Da $\mathbf{b}^1 \cdot \mathbf{a}_1 = 1$, $\mathbf{b}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\ 1)$
$\mathbf{b}^2 \cdot \mathbf{a}_1 = 0 \to \mathbf{b}^2 = (0\ \lambda)$. Da $\mathbf{b}^2 \cdot \mathbf{a}_2 = 1$, $\mathbf{b}^2 = (0\ 1)$
Alternative : $\begin{pmatrix} \mathbf{b}^1 \\ \mathbf{b}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{1} \to \begin{pmatrix} \mathbf{b}^1 \\ \mathbf{b}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
c) $g_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$
$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$
d) $x_i = g_{ij}x^j$
$x_1 = g_{11}x^1 + g_{12}x^2 = 2x^1 - \sqrt{2}x^2$
$x_2 = g_{21}x^1 + g_{22}x^2 = -\sqrt{2}x^1 + 2x^2$
e) $x^1 = -k/\sqrt{10}$ und $x^2 = k/\sqrt{5} \to x_1 = 2x^1 - \sqrt{2}x^2 = -4k/\sqrt{10}$ und $x_2 = -\sqrt{2}x^1 + 2x^2 = 3\sqrt{2}k/\sqrt{10}$
$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_i x^i} = k\sqrt{4/10 + 6/10} = k.$
f) $\mathbf{E}_\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}^T}{\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x}}$

$R_x = |\mathbf{E_x R}| = \left|\mathbf{x}\frac{\mathbf{x}^T\cdot\mathbf{R}}{\mathbf{x}^T\cdot\mathbf{x}}\right| = |\mathbf{x}|\,\frac{|\mathbf{x}^T\cdot\mathbf{R}|}{|\mathbf{x}|^2} = \frac{1}{|\mathbf{x}|}|\mathbf{x}^T\cdot\mathbf{R}| = \frac{1}{k}|(x_1\mathbf{b}^1 + x_2\mathbf{b}^2)(n\mathbf{a}_1 + m\mathbf{a}_2)| = \frac{1}{k}(nx_1 + mx_2) = (-4n + 3\sqrt{2}m)/\sqrt{10}$

Anmerkung: Bragg-Bedingung

Beim Streuprozess wird konstruktive Interferenz beobachtet wenn die Wegdifferenz zwischen A und B (der Wellenvektor der einfallenden Strahlung $\mathbf{x}$ und der der gestreuten $\mathbf{x}'$ mit $|\mathbf{x}| = |\mathbf{x}'| = k$) ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$ ist (d.h. $R_x + R'_x = N\lambda$ oder $|(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\cdot\mathbf{R}| = 2\pi N$). Diese Bedingung für konstruktive Interferenz ist die Bragg-Bedingung. Im dualen Raum wird die Änderung des Wellenvektors beim Streuprozess mit $\mathbf{K} = \mathbf{x}-\mathbf{x}' = 2\pi(k\mathbf{b}^1 + l\mathbf{b}^2)$ dargestellt (ähnlich wie $\mathbf{R} = n\mathbf{a}_1 + m\mathbf{a}_2$). In dieser Darstellung hat die Bragg-Bedingung einen vereinfachte Ausdruck $nk + ml = N$.



4.3 Lokale Transformation

a) $\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i$ mit $\mathbf{e}_1 = \hat{\mathbf{x}}$ und $\mathbf{e}_2 = \hat{\mathbf{y}}$.
Infinitesimale Änderung von $\mathbf{x}$: $\mathbf{x} + \mathbf{dx} = \mathbf{x} + dx^i\mathbf{e}_i$.
Lokale Basistransformation (linearisierte Basistransformation für die infinitesimalen Änderung):

$$\mathbf{x} + \mathbf{dx} = \mathbf{x} + dx^i\mathbf{e}_i = \mathbf{x} + (\tfrac{\partial}{\partial x'^j}x^i)dx'^j\mathbf{e}_i \equiv \mathbf{x} + dx'^j\mathbf{e}'_j. \rightarrow \mathbf{e}'_j = (\tfrac{\partial}{\partial x'^j}x^i)\mathbf{e}_i$$

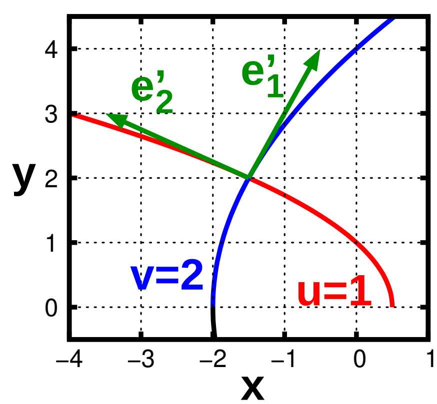
parabolische Zylinderkoordinaten : $x'^1 = u$, $x'^2 = v$
Transformation zwischen kartesischen Koordinaten und parabolischen Zylinderkoordinaten
$x^1 = (u^2 - v^2)/2$ und $x^2 = uv$.
$\mathbf{e}'_1 = (\frac{\partial}{\partial x'^1}x^i)\mathbf{e}_i = u\,\mathbf{e}_1 + v\,\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}'_2 = (\frac{\partial}{\partial x'^2}x^i)\mathbf{e}_i = -v\,\mathbf{e}_1 + u\,\mathbf{e}_2$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}\mathbf{S} \text{ mit } s^i{}_j = \frac{\partial}{\partial x'^j}x^i$$

b) $u = 1 \rightarrow x = (1 - v^2)/2$ und $y = v \rightarrow x = (1 - y^2)/2$ $(y > 0)$
$v = 2 \rightarrow x = (u^2 - 4)/2$ und $y = 2u$
$\rightarrow x = (y^2 - 16)/8$ $(-\infty < y < \infty)$
$(u, v) = (1, 2) \rightarrow (x, y) = (-1.5, 2)$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

In orthogonalen Systemen ist $\mathbf{e}'_i$ senkrecht auf der Kurve $x'_i = konst.$ (und in 2 Dimensionen parallel zu $\mathbf{e}'_j$ $(j \neq i)$).



c) $(g'_{ij}) = (\mathbf{e}'_i\cdot\mathbf{e}'_j) = (u^2 + v^2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(g'^{ij}) = (g'_{ij})^{-1} = \frac{1}{u^2+v^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \end{pmatrix} = \mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{e}'^1 \\ \mathbf{e}'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{e}'^1 \\ \mathbf{e}'^2 \end{pmatrix}$

$\mathbf{b}^T = (x - \sqrt{x^2 + y^2})\mathbf{e}^1 + y\mathbf{e}^2 = ((u^2 - v^2)/2 - (u^2 + v^2)/2)\mathbf{e}^1 + uv\mathbf{e}^2 = -v^2\mathbf{e}^1 + uv\mathbf{e}^2$
$= -v^2(u\mathbf{e}'^1 - v\mathbf{e}'^2) + uv(v\mathbf{e}'^1 + u\mathbf{e}'^2) = v(v^2 + u^2)\mathbf{e}'^2$
$\int_C \mathbf{b}\cdot\mathbf{dx} = \int_C v(v^2 + u^2)\mathbf{e}'^2\cdot dx'^i\mathbf{e}'_i = \int_C v(v^2 + u^2)dx'^2 = \int_1^3(v^3 + v)dv = 24$