5. Tutorium **für 23.11.2018**

5.1 Lokale Transformation

Berechne, für das folgende Koordinatensystem x'^i, die Transformationsmatrix (Jacob-Matrix) $\mathbf{S}$ und den zugehörigen metrischen Tensor $\mathbf{g}' = (g'_{ij})$ für eine lokale Transformation $dx^i\mathbf{e}_i = dx'^i\mathbf{e}'_i$ zwischen den kartesischen Basisvektoren $\mathbf{e}_i$ und den Basisvektoren $\mathbf{e}'_i$ des Koordinatensystems x'^i, wobei

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \mathbf{S}$$

a) Transformationsmatrix $\mathbf{S}$ der Kugelkoordinaten $(x'^1, x'^2, x'^3) = (r, \theta, \phi)$, wobei $(x^1, x^2, x^3) = (r\sin\theta\cos\phi,\ r\sin\theta\sin\phi,\ r\cos\theta)$.
b) Metrischer Tensor $\mathbf{g}'$ der Kugelkoordinaten.
c) Transformationsmatrix $\mathbf{S}$ der parabolischen Koordinaten $(x'^1, x'^2, x'^3) = (\xi, \eta, \phi)$, wobei $(x^1, x^2, x^3) = (\sqrt{\xi\eta}\cos\phi, \sqrt{\xi\eta}\sin\phi, (\xi - \eta)/2)$.
d) Metrischer Tensor $\mathbf{g}'$ der parabolischen Koordinaten.

5.2 Tensoren

a) Die Komponenten eines kovarianten Tensors zweiter Stufe A bezüglich der dualen Basis zur kartesischen Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ lauten $a_{11} = 0$, $a_{12} = \sqrt{2}$, $a_{21} = \sqrt{2}$, $a_{22} = 1$. Wie lauten die Komponenten a'_{ij} bezüglich der dualen Basis zu einer um einen konstanten Winkel φ gedrehten Basis $\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ mit $\cos\varphi = 1/\sqrt{3}$ und $\sin\varphi = \sqrt{2/3}$?
b) Wie schauen die metrischen Tensoren g'_{ij} der gedrehten Basis und g'^{ij} der dualen Basis aus?
c) Berechne die Komponenten a'^{ij} des zugehörigen kontravarianten Tensors mit Hilfe des metrischen Tensors.

Nicht-orthogonale Basis

d) Wie lauten die Komponenten a''_{ij} des Tensors A bezüglich der dualen Basis zur nicht-orthogonalen Basis $\begin{pmatrix} \mathbf{e}''_1 & \mathbf{e}''_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?
e) Berechne g''_{ij}, g''^{ij}.
f) Berechne die Komponenten a''^{ij} des kontravarianten Tensors und $a''^{i}{}_{j}$ in der gemischten Darstellung.
g) Zeige, dass gilt $a''^{ij}a''_{ji} = a^{ij}a_{ji}$.

5.3 Gruppentheorie

a) Stelle die Cayley-Tafeln der Multiplication auf der Menge $G = \{I, \sigma_y\}$ auf, wobei I das neutrale Element ist und

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Verknüpfung $\circ$ auf der Menge $G = \{I, a, b, c, d\}$ ist mit den folgenden Cayley-Tafeln definiert. In welcher Tafel handelt es sich um eine Gruppe?

b)

$\circ$	I	a	b	c	d
I	I	a	b	c	d
a	a	d	c	I	b
b	b	c	a	d	I
c	c	I	d	b	a
d	d	b	I	a	c

c)

$\circ$	I	a	b	c	d
I	I	a	b	c	d
a	a	b	c	d	I
b	b	d	a	I	c
c	c	I	d	b	a
d	d	c	I	a	b

Ankreuzbar: 1ab, 1cd, 2a-c, 2de, 2fg, 3a-c