5. Tutorium - Lösungen **23.11.2018**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel anzuschauen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

5.1 Lokale Transformation

a) $\mathbf{e}'_j = s^i{}_j \mathbf{e}_i = \frac{\partial}{\partial x'^j} x^i \mathbf{e}_i$ (siehe Bsp.4.3)

$$\mathbf{S} = (\tfrac{\partial}{\partial x'^j} x^i) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

b) $g'_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j$

$$\rightarrow \mathbf{g}' = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1'^T \\ \mathbf{e}_2'^T \\ \mathbf{e}_3'^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix} = \mathbf{S}^T \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \mathbf{S} = \mathbf{S}^T\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

c) $$\mathbf{S} = (\tfrac{\partial}{\partial x'^j} x^i) = \begin{pmatrix} (1/2)\sqrt{\eta/\xi}\cos\phi & (1/2)\sqrt{\xi/\eta}\cos\phi & -\sqrt{\xi\eta}\sin\phi \\ (1/2)\sqrt{\eta/\xi}\sin\phi & (1/2)\sqrt{\xi/\eta}\sin\phi & \sqrt{\xi\eta}\cos\phi \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

d) $$\mathbf{g}' = \mathbf{S}^T\mathbf{S} = \begin{pmatrix} (\xi+\eta)/(4\xi) & 0 & 0 \\ 0 & (\xi+\eta)/(4\eta) & 0 \\ 0 & 0 & \xi\eta \end{pmatrix}$$

Anmerkung : Da die metrischen Tensoren diagonal sind, sind beide die Kugelkoordinaten und die parabolischen Koordinaten orthogonale (aber nicht-normierte) Koordinaten.

5.2 Tensoren

a) Transformationsmatrix $\mathbf{e}'_i = s'^j{}_i \mathbf{e}_j \rightarrow \mathbf{S}' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$

Die kovarianten Komponenten werden mit der Transformationsmatrix $\mathbf{S}'$ transformiert: $a'_{jk} = s'^l{}_j s'^m{}_k a_{lm}$

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{S}'^T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mathbf{S}' = \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Metrischer Tensor: $g'_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j$.

$$\mathbf{g}' = (g'_{ij}) = \mathbf{S}'^T \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{g}=\mathbf{1}} \mathbf{S}' = \mathbf{S}'^T\mathbf{S}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Der metrische Tensor der kartesischen Koordinaten ist die Einheitstensor.)

$$\mathbf{g}'^* = (g'^{ij}) = \mathbf{g}'^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $a'^{ij} = g'^{ik} g'^{jl} a'_{kl}$.

$$\begin{pmatrix} a'^{11} & a'^{12} \\ a'^{21} & a'^{22} \end{pmatrix} = \mathbf{g}'^* \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix} \mathbf{g}'^{*T} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Alternative:

Da $\mathbf{g} = \mathbf{1}$, $a^{ij} = g^{ik} g^{jl} a_{kl} = a_{ij}$.

Die kontravarianten Komponenten werden mit $\mathbf{T}' = (t'^i{}_j) = \mathbf{S}'^{-1}$ transformiert (d.h. $a'^{ij} = t'^i{}_k a^{k\ell} t'^j{}_\ell$).

Für die Transformationen zwischen orthonormalen Koordinatensystemen $\mathbf{S}'^{-1} = \mathbf{S}'^T$.

$$\begin{pmatrix} a'^{11} & a'^{12} \\ a'^{21} & a'^{22} \end{pmatrix} = \mathbf{T}' \begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} \\ a^{21} & a^{22} \end{pmatrix} \mathbf{T}'^T = \mathbf{S}'^T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mathbf{S}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Anmerkung : Spektraltheorem (siehe Bsp.3.3)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{S}' \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{S}'^T = 2\mathbf{S}' \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Projektor } \mathbf{E}'_1 \\ \text{bzgl. der Basis}\{\mathbf{e}'^i\}}} \mathbf{S}'^T - \mathbf{S}' \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Projektor } \mathbf{E}'_2 \\ \text{bzgl. der Basis}\{\mathbf{e}'^i\}}} \mathbf{S}'^T = \underbrace{2\mathbf{E}'_1 - \mathbf{E}'_2}_{\substack{\text{Projektoren } \mathbf{E}'_j \\ \text{bzgl. der Basis}\{\mathbf{e}^i\}}}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^n = \mathbf{S}' \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\mathbf{S}'^T\mathbf{S}'}_{=\mathbf{1}} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{S}'^T \cdots = \mathbf{S}' \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \mathbf{S}'^T$$

d) Transformationsmatrix $\mathbf{S}'' = (s''^i{}_j) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a''_{11} & a''_{12} \\ a''_{21} & a''_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{S}''^T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mathbf{S}'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$$

e) $\mathbf{g}'' = \mathbf{S}''^T\mathbf{S}'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\mathbf{g}''^* = \mathbf{g}''^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} a''^1{}_1 & a''^1{}_2 \\ a''^2{}_1 & a''^2{}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{g}''^* \begin{pmatrix} a''_{11} & a''_{12} \\ a''_{21} & a''_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2}+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$

$\left[\text{oder} \quad \begin{pmatrix} a''^1{}_1 & a''^1{}_2 \\ a''^2{}_1 & a''^2{}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{S}''^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mathbf{S}'' = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}\right]$

$$\begin{pmatrix} a''^{11} & a''^{12} \\ a''^{21} & a''^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a''^1{}_2 & a''^1{}_2 \\ a''^2{}_1 & a''^2{}_2 \end{pmatrix} \mathbf{g}''^{*T} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2}+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2}+1 & \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2}-1 & 1 \end{pmatrix}$$

Anmerkung : Im Allgemeinen $\mathbf{S}''^{-1} \neq \mathbf{S}''^T$ für nicht-orthogonale Systeme.

$$\left.\begin{array}{l} \begin{pmatrix} a''_{11} & a''_{12} \\ a''_{21} & a''_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{S}''^T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mathbf{S}'' \\ \begin{pmatrix} a''^1{}_1 & a''^1{}_2 \\ a''^2{}_1 & a''^2{}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{S}''^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mathbf{S}'' \\ \begin{pmatrix} a''^{11} & a''^{12} \\ a''^{21} & a''^{22} \end{pmatrix} = \mathbf{S}''^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} (\mathbf{S}''^{-1})^T \end{array}\right\} \begin{pmatrix} a''_{11} & a''_{12} \\ a''_{21} & a''_{22} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a''^1{}_1 & a''^1{}_2 \\ a''^2{}_1 & a''^2{}_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a''^{11} & a''^{12} \\ a''^{21} & a''^{22} \end{pmatrix}$$

g) $\mathbf{T}'' = \mathbf{S}''^{-1}$

$$a''^{ij}a''_{ji} = (t''^i{}_k t''^j{}_\ell a^{k\ell})(s''^m{}_j s''^n{}_i a_{mn}) = a^{k\ell}a_{mn}(t''^i{}_k s''^n{}_i)(t''^j{}_\ell s''^m{}_j) = a^{k\ell}a_{mn}\delta^n_k\delta^m_\ell = a^{n\ell}a_{\ell n} = a^{ij}a_{ji}$$

5.3 Gruppentheorie

a) $\sigma_y^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = I \rightarrow$

	I	σ_y
I	I	σ_y
σ_y	σ_y	I

Bemerkung :

Die Pauli-Matrix σ_y ist das erzeugende Element der speziellen orthogonalen Gruppe SO(2), d.h.

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = I\cos\theta + i\sigma_y \sin\theta = \exp(i\theta\sigma_y)$$

b) Abgeschlossenheit ($G \times G \to G$) : erfüllt

neutrales Element : I

inverses Element : $a \circ c = c \circ a = I$, $b \circ d = d \circ b = I$

(symmetrische Tafel $x \circ y = y \circ x$: abelsche Gruppe)

a ist das Erzeugende Element ($d = a \circ a$, $b = a \circ d = a^3$, $c = a \circ b = a^4$)

Überprüfung der Assozivität :

Zuerst, die Assozivität $x \circ (a \circ y) = (x \circ a) \circ y$

1. Tafel für $x \circ (a \circ y)$

$\circ$	$a \circ I$	$a \circ a$	$a \circ b$	$a \circ c$	$a \circ d$
I	a	d	c	I	b
a	d	b	I	a	c
b	c	I	d	b	a
c	I	a	b	c	d
d	b	c	a	d	I

$$= \left(\begin{array}{c|ccccc} \multicolumn{6}{c}{\text{Permutation der Spalten}} \\ \circ & a & d & c & I & b \\ \hline I & & & & & \\ a & & & & & \\ b & & & & & \\ c & & & & & \\ d & & & & & \end{array} \right) \tag{1}$$

2. Tafel für $(x \circ a) \circ y$

$\circ$	I	a	b	c	d
$I \circ a$	a	d	c	I	b
$a \circ a$	d	b	I	a	c
$b \circ a$	c	I	d	b	a
$c \circ a$	I	a	b	c	d
$d \circ a$	b	c	a	d	I

$$= \left(\begin{array}{c|ccccc} \multicolumn{6}{c}{\text{Permutation der Reihen}} \\ \circ & I & a & b & c & d \\ \hline a & & & & & \\ d & & & & & \\ c & & & & & \\ I & & & & & \\ b & & & & & \end{array} \right) \tag{2}$$

Vergleich zwischen den 1. und 2. Tafeln $\rightarrow x \circ (a \circ y) = (x \circ a) \circ y$
Assozivität der anderen Elemente :
$x \circ (d \circ y) = x \circ ((a \circ a) \circ y) = x \circ (a \circ (a \circ y)) = (x \circ a) \circ (a \circ y) = ((x \circ a) \circ a) \circ y = (x \circ (a \circ a)) \circ y = (x \circ d) \circ y$,
u.s.w.
c) $a \circ d = I \rightarrow (a \circ d) \circ b = b$ aber $a \circ (d \circ b) = a \circ I = a$
Die Verknüpfung $\circ$ ist nicht assoziativ.