6. Tutorium **für 7.12.2018**

6.1 Delta-Distribution und Heaviside-Funktion

Berechne die folgenden Integrale für die Delta-Distribution $\delta(x)$ und die Heaviside-Funktion $H(x)$.

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(2-3x)(3x^2+x-1)dx$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(2x^2+3x-2)\log(x^2)dx$

c) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(R^2-x^2-y^2-z^2)\,dxdydz$

d) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(R-\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,dxdydz$ (R: positive Konstante)

6.2 Deltafolge

a) Überprüfe durch Anwenden auf eine Testfunktion, ob die folgende Folge $\{f_n(x)\}$ eine Deltafolge für $n \to \infty$ ist:

$$f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2} \,.$$

b) Zeige mit Verwendung der Deltafolge $\{f_n(x)\}$, dass gilt

$$x\frac{d}{dx}\delta(x) = -\delta(x)\,.$$

c) Berechne die Fouriertransformation der Deltafolge $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)e^{-ikx}dx$ im Limes $n \to \infty$.

Hinweis :
$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$, $\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}/2$, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-ikx}dx = \sqrt{\pi}e^{-k^2/4}$

6.3 Verallgemeinerte Funktion

Berechne folgende Ausdrücke der verallgemeinerten Funktionen

a) $\left(\frac{d}{dt}+\gamma\right)^2 \left(H(t)te^{-\gamma t}\right)$

b) $\left(\frac{\partial}{\partial t} - D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) H(t)\sqrt{\frac{1}{4\pi Dt}}e^{-x^2/(4Dt)}$ (Hinweis : siehe Bsp.6.2a)

c) $\frac{d^2}{dx^2}\sin|x|$

d) $\int_0^{\infty} f'(x)\,\sin x\,dx \qquad \left(f(x) = \begin{cases} \sin x & (|x| \le \pi/2) \\ 0 & (|x| > \pi/2) \end{cases}\right)$

6.4 Laplace-Operator

$\mathbf{r} = x^i \mathbf{e}_i$ sei ein 3-dimensionaler Vektor in der kartesischen Basis. Zeige, dass gilt $\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta(\mathbf{r})$ $(r = |\mathbf{r}|)$ mit den folgenden Schritten:
a) Berechne $\nabla^2(1/r)$ für $r > \varepsilon > 0$.
b) Berechne das Integral im Limes $\varepsilon \to 0^+$

$$\int_{V_\varepsilon} d^3r \, \nabla \cdot \left[\left(\nabla \frac{1}{r} \right) \varphi(\mathbf{r}) \right]$$

für analytische Funktionen $\varphi(\vec{r})$ wobei $V_\varepsilon = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 < \varepsilon^2\}$.
(Hinweis : Gaußscher Integralsatz $\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$ mit der Oberfläche S des Volumens V und den Normaleneinheitsvektor $\mathbf{n}$ der Fläche S)
c) Zeige $\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta(\mathbf{r})$ durch Anwenden auf eine Testfunktion.

Ankreuzbar: 1ab, 1cd, 2a-c, 3ab, 3cd, 4a-c