7. Tutorium **für 14.12.2018**

7.1 Residuensatz

Berechne die folgenden komplexen Integrale:
a) $\oint_C \frac{z}{2z^2-2z-4}dz$ über den Kreis $C = \{z = 3e^{i\theta}\,|\,0 \leq \theta < 2\pi\}$
b) $\oint_{C_1} \frac{1}{4z^2+1}dz$ über den geschlossenen Halbkreis C_1, der aus $\{z = e^{i\theta}\,|\,0 < \theta < \pi\}$ und $\{z = x| -1 \leq x \leq 1\}$ besteht.
c) $\oint_{C_2} \frac{1}{4z^2+1}dz$ über den geschlossenen Halbkreis C_2, der aus $\{z = e^{i\theta}\,|\, -\pi < \theta < 0\}$ und $\{z = x|1 \geq x \geq -1\}$ besteht.
d) $\oint_C \frac{2z^3+7z^2+8z+5}{2(z+1)^3}dz$ über den Kreis $C = \{z = 2e^{i\theta}\,|\,0 \leq \theta < 2\pi\}$
e) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x^2+4}dx = \lim_{R\to\infty}\left(\oint_C \frac{e^{itz}}{z^2+4}dz - \int_{C_1} \frac{e^{itz}}{z^2+4}dz\right)$ mit $t > 0$ (Konstante), $C_1 = \{z = Re^{i\theta}\,|\,0 < \theta < \pi\}$ und C, einem geschlossenen Halbkreis, der aus C_1 und $C_2 = \{z = x| -R \leq x \leq R\}$ besteht.

7.2 Greensche Funktion I

Betrachte einen Differentialoperator

$$\mathcal{L}_t x(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t)$$

Finde die Greensche Funktion $G(t,t')$ des Differentialoperators $\mathcal{L}_t$ mit den folgenden Schritten.
a) Schreibe die allgemeine Lösung $x_0(t; A, B)$ der homogenen Differentialgleichung $\mathcal{L}_t x_0(t) = 0$ an (A und B seien 2 freie Konstanten der allgemeinen Lösung).
b) Die Greensche Funktion erfüllt die inhomogene Differentialgleichung $\mathcal{L}_t G(t,t') = \delta(t-t')$. Das heißt, dass gilt $\mathcal{L}_t G(t,t') = 0$ für $t \neq t'$. Nimm den Ansatz

$$G(t,t') = \begin{cases} x_0(t; A_1(t'), B_1(t')) & (t < t') \\ x_0(t; A_2(t'), B_2(t')) & (t' < t) \end{cases}$$

mit der allgemeinen Lösung x_0 aus a) an und bestimme die Koeffizienten $A_1(t')$, $A_2(t')$, $B_1(t')$ und $B_2(t')$, die die folgenden Bedingungen erfüllen.
i) Stetigkeit der Greenschen Funktion : $\lim_{t\to t'^-} G(t,t') = \lim_{t\to t'^+} G(t,t')$
ii) $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \mathcal{L}_t G(t,t')dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\partial}{\partial t} G(t,t')\Big|_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} = 1$
iii) Translationsinvarianz : $G(t,t') = G(t-t', 0)$
iv) Randbedingungen : $A_1(t'=0) = \alpha$ und $B_1(t'=0) = \beta$
c) Löse die inhomogene Differentialgleichung $\mathcal{L}_t x(t) = H(t)H(T-t)$ mit den Randbedingungen $x(0) = x(T) = 0$, wobei $H(t)$ die Heaviside-Funktion und T eine positive Konstante ist.

7.3 Greensche Funktion II

Betrachte einen Differentialoperator, der durch

$$\mathcal{L}_t x(t) = \left(\frac{d}{dt} + \gamma + i\omega_0\right)\left(\frac{d}{dt} + \gamma - i\omega_0\right) x(t)$$

definiert ist (γ : positive Konstante, ω_0 : Konstante).
a) Finde die Fouriertransformation $\tilde{G}_I(\omega)$ einer Greenschen Funktion $G_I(t,t')$, die die inhomogene Differentialgleichung $\mathcal{L}_t G_I(t,t') = \delta(t-t')$ erfüllt. Die (inverse) Fouriertransformation ist durch

$$G_I(t,t') = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_I(\omega)\, e^{i\omega(t-t')} d\omega$$

definiert.
b) Berechne die inverse Fouriertransformation von $\tilde{G}_I(\omega)$ und bestimme die Greensche Funktion $G_I(t,t')$.
c) Löse die inhomogene Differentialgleichung $\mathcal{L}_t x(t) = H(t)$ mit den Randbedingungen $x(t=0) = 0$ und $x(t \to \infty) = 1/(\gamma^2 + \omega_0^2)$ ($H(t)$: Heaviside-Funktion).

Ankreuzbar: 1a-c, 1de, 2ab, 2c, 3ab, 3c