8. Tutorium **für 21.12.2018**

8.1 Sturm-Liouville-Problem

a) Transformiere die Differentialgleichung

$$(1-x^2)^2 y''(x) - 2x(1-x^2)y'(x) + \big(\ell(\ell+1)(1-x^2) - m^2\big)\, y(x) = 0\,, \qquad (x \in [-1,1])$$

in die Sturm-Liouville'sche Gestalt $\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x) + \ell(\ell+1)\rho(x)\right) y(x) = 0$.

b) Transformiere die Differentialgleichung

$$(1-x^2)y''(x) - (2a+1)xy'(x) + n(n+2a)y(x) = 0\,, \qquad (x \in [-1,1])$$

in die Sturm-Liouville'sche Gestalt $\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x) + n(n+2a)\rho(x)\right) y(x) = 0$.

c) Transformiere die Differentialgleichung

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (a^2x^2 - n^2)y(x) = 0$$

in die Sturm-Liouville'sche Gestalt $\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x) + a^2\rho(x)\right) y(x) = 0$.

d) Transformiere die Differentialgleichung

$$xy''(x) + (a+1-x)y'(x) + ny(x) = 0$$

in die Sturm-Liouville'sche Gestalt $\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x) + n\rho(x)\right) y(x) = 0$.

8.2 Greensche Funktion III

Betrachte einen Differentialoperator

$$\mathcal{L}_t = \frac{d^2}{dt^2} - i\Omega\frac{d}{dt} + 2\Omega^2$$

(Ω : reell).

a) Finde mit Hilfe der Fouriertransformation eine Greensche Funktion $G_I^+(t,t')$, die die inhomogene Differentialgleichung $\mathcal{L}_t G_I^+(t,t') = \delta(t-t')$ erfüllt.

Hinweis: Falls die Pole, $\lambda_{1,2}$, der Fourier-transformierten Greenschen Funktion auf der reellen Achse liegen, verschiebe zuerst die Pole bei $i\varepsilon$ in die obere Hälfte der komplexen Zahlenebene (d.h. $\lambda_{1,2} \to \lambda_{1,2} + i\varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$) und berechne den Grenzwert $G_I^+(t,t') = \lim_{\varepsilon\to 0+} G_\varepsilon^+(t,t')$.

b) Berechne die Greensche Funktion $G_I^-(t,t') = \lim_{\varepsilon\to 0-} G_\varepsilon(t,t')$ mit einer negativen Verschiebung (d.h. $\lambda_{1,2} \to \lambda_{1,2} + i\varepsilon$ mit $\varepsilon < 0$).

c) Überprüfe, dass $G_0(t,t') = G_I^+(t,t') - G_I^-(t,t')$ die homogene Differentialgleichung $\mathcal{L}_t G_0(t,t') = 0$ erfüllt.

8.3 Separationsansatz und Frobenius-Methode

a) In beliebigen krummlinigen Orthogonalkoordinaten wird der Laplace-Operator durch

$$\nabla^2\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}}\sum_{i=1}^{3}\partial_i\left(\frac{\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}}{g_{ii}}\partial_i\psi(\mathbf{x})\right)$$

gegeben. ($\mathbf{g} = (g_{ij})$ ist der metrische Tensor des Koordinatensystems.) Zeige für Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ), dass gilt

$$\nabla^2\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\psi(\mathbf{x})\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta\psi(\mathbf{x})\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\phi^2\psi(\mathbf{x})\,.$$

Die Kugelkoordinaten sind durch $(x, y, z) = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$ definiert.

b) Führe den Separationsansatz $\psi(\mathbf{x}) = R(r)Q(\theta)F(\phi)$ der Differentialgleichung

$$\left(-\frac{1}{2}\nabla^2 - \frac{1}{r}\right)\psi(\mathbf{x}) = E\psi(\mathbf{x})\,.$$

durch und schreibe die Differentialgleichungen der r-Koordinate, der θ-Koordinate, und der ϕ-Koordinate an (E : Konstante).

c) Zeige, dass bei der Koordinatentransformation $u = \cos\theta + 1$ und $P(u) = Q(\theta)$ die Differentialgleichung der θ-Koordinate in die Form

$$\partial_u\left((2u - u^2)\partial_u P(u)\right) + Z_1 P(u) - \frac{Z_2}{2u - u^2}P(u) = 0$$

umgeschrieben wird (Z_1, Z_2 : Konstante).

d) Verwende den Ansatz $P(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^{n+\sigma}$ und bestimme die charakteristischen Exponenten σ und die Rekursionsgleichung der Koeffizienten a_n der Differentialgleichung aus c) mit $Z_1 = \ell(\ell + 1)$ und $Z_2 = 0$.

Ankreuzbar: 1ab, 1cd, 2a-c, 3a, 3bc, 3d