8. Tutorium - Lösungen **21.12.2018**

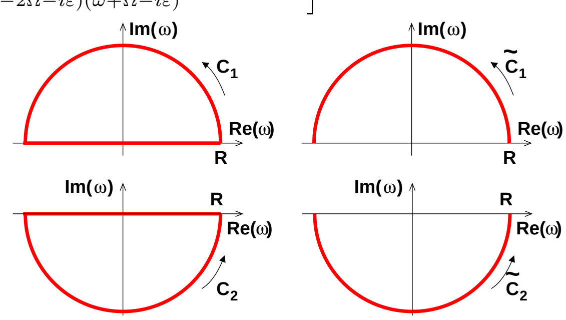
- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel anzuschauen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

8.1 Sturm-Liouville-Problem

Die Sturm-Liouville'schen Gestalt:
$\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x) + \lambda\rho(x)\right)y(x) = 0 \to p(x)y''(x) + p'(x)y'(x) + q(x)y(x) + \lambda\rho(x)y(x) = 0$
a) (Allgemeine Legendregleichung) $(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \left(\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y(x) = 0$
Vergleich mit der Differentialgleichung in der Sturm-Liouville'schen Gestalt :
$p'(x)/p(x) = -2x/(1-x^2)$, $q(x)/p(x) = -\frac{m^2}{(1-x^2)^2}$ und $\ell(\ell+1)\rho(x)/p(x) = \ell(\ell+1)/(1-x^2)$
$\to \log(p(x)) = \log(1-x^2) \to p(x) = 1-x^2$, $q(x) = -\frac{m^2}{1-x^2}$ und $\rho(x) = 1$
$\to \left(\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}\right] - \frac{m^2}{1-x^2} + \ell(\ell+1)\right)y(x) = 0$
b) (Gegenbauer-Differentialgleichung) $(1-x^2)y''(x) - (2a+1)xy'(x) + n(n+2a)y(x) = 0$
Vergleich mit der Differentialgleichung in der Sturm-Liouville'schen Gestalt :
$p'(x)/p(x) = -(2a+1)x/(1-x^2)$, $q(x)/p(x) = 0$ und $n(n+2a)\rho(x)/p(x) = n(n+2a)/(1-x^2)$
$\to \log(p(x)) = (a+1/2)\log(1-x^2) \to p(x) = (1-x^2)^{a+1/2}$, $q(x) = 0$ und $\rho(x) = (1-x^2)^{a-1/2}$. $\to$ $\left(\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^{a+1/2}\frac{d}{dx}\right] + n(n+2a)(1-x^2)^{a-1/2}\right)y(x) = 0$
c) (Besselsche Differentialgleichung) $x^2y''(x) + xy'(x) + (a^2x^2 - n^2)y(x) = 0$
Vergleich mit der Differentialgleichung in der Sturm-Liouville'schen Gestalt :
$p'(x)/p(x) = 1/x$, $q(x)/p(x) = -n^2/x^2$ und $a^2\rho(x)/p(x) = a^2$
$\to \log(p(x)) = \log x \to p(x) = x$, $q(x) = -n^2/x$ und $\rho(x) = x \to \left(\frac{d}{dx}\left[x\frac{d}{dx}\right] - \frac{n^2}{x} + a^2x\right)y(x) = 0$
d) (zugeordnete Laguerre-Gleichung) $xy''(x) + (a+1-x)y'(x) + ny(x) = 0$
Vergleich mit der Differentialgleichung in der Sturm-Liouville'schen Gestalt :
$p'(x)/p(x) = (a+1-x)/x$, $q(x)/p(x) = 0$ und $n\rho(x)/p(x) = n/x \to \log(p(x)) = (a+1)\log(x) - x$
$\to p(x) = x^{a+1}e^{-x}$, $q(x) = 0$ und $\rho(x) = x^a e^{-x}$. $\to \left(\frac{d}{dx}\left[x^{a+1}e^{-x}\frac{d}{dx}\right] + nx^a e^{-x}\right)y(x) = 0$

8.2 Greensche Funktion

a)
$\tilde{G}_I(\omega) = \frac{1}{-\omega^2+\Omega\omega+2\Omega^2)} = -\frac{1}{(\omega-2\Omega)(\omega+\Omega)}$
$\tilde{G}_\varepsilon(\omega) = -\frac{1}{(\omega-2\Omega-i\varepsilon)(\omega+\Omega-i\varepsilon)}$
$G_\varepsilon(t,t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{G}_\varepsilon(\omega)e^{i\omega(t-t')}d\omega = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\omega-2\Omega-i\varepsilon)(\omega+\Omega-i\varepsilon)}e^{i\omega(t-t')}d\omega$
$= -H(t-t')\frac{1}{2\pi}\left[\oint_{C_1}\frac{1}{(\omega-2\Omega-i\varepsilon)(\omega+\Omega-i\varepsilon)}e^{i\omega(t-t')}d\omega - \int_{\tilde{C}_1}\frac{1}{(\omega-2\Omega-i\varepsilon)(\omega+\Omega-i\varepsilon)}e^{i\omega(t-t')}d\omega\right]$
$+H(t'-t)\frac{1}{2\pi}\left[\oint_{C_2}\frac{1}{(\omega-2\Omega-i\varepsilon)(\omega+\Omega-i\varepsilon)}e^{i\omega(t-t')}d\omega - \int_{\tilde{C}_2}\frac{1}{(\omega-2\Omega-i\varepsilon)(\omega+\Omega-i\varepsilon)}e^{i\omega(t-t')}d\omega\right]$



$\tilde{C}_1 = \{z = Re^{i\theta}\,|\, 0 < \theta < \pi\}$ und $\tilde{C}_2 = \{z = Re^{i\theta}\,|\, -\pi < \theta < 0\}$.
C_1 (oder C_2) ist der geschlossene Halbkreis, der aus $\tilde{C}_1$ (oder $\tilde{C}_2$) und $\{z = x| -1 \leq x \leq 1\}$ besteht.
Da im Limes $R \to \infty$ die Integrale über die Halbkreise $\tilde{C}_1$ und $\tilde{C}_2$ gegen null gehen werden,

$G_\varepsilon(t,t') = \lim_{R\to\infty}\left[-H(t-t')\frac{1}{2\pi}\oint_{C_1}\frac{1}{(\omega-2\Omega-i\varepsilon)(\omega+\Omega-i\varepsilon)}e^{i\omega(t-t')}d\omega + H(t'-t)\frac{1}{2\pi}\oint_{C_2}\frac{1}{(\omega-2\Omega-i\varepsilon)(\omega+\Omega-i\varepsilon)}e^{i\omega(t-t')}d\omega\right]$

$= -iH(t-t')\ \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-2\Omega-i\varepsilon}\Big|_{\omega=-\Omega+i\varepsilon} - iH(t-t')\ \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega+\Omega-i\varepsilon}\Big|_{\omega=2\Omega+i\varepsilon}\quad(\varepsilon>0)$
$= iH(t-t')\frac{e^{-\varepsilon(t-t')}}{3\Omega}\left(e^{-i\Omega(t-t')} - e^{2i\Omega(t-t')}\right)$
Im Limes $\varepsilon\to 0^+\ G_I^+(t,t') = H(t-t')\frac{i}{3\Omega}\left(e^{-i\Omega(t-t')} - e^{2i\Omega(t-t')}\right)$
b) Wenn $\varepsilon<0$,
$G_\varepsilon(t,t') = \lim_{R\to\infty}\left[-H(t-t')\frac{1}{2\pi}\oint_{C_1}\frac{1}{(\omega-2\Omega-i\varepsilon)(\omega+\Omega-i\varepsilon)}e^{i\omega(t-t')}d\omega + H(t'-t)\frac{1}{2\pi}\oint_{C_2}\frac{1}{(\omega-2\Omega-i\varepsilon)(\omega+\Omega-i\varepsilon)}e^{i\omega(t-t')}d\omega\right]$
$= iH(t'-t)\ \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega+\Omega-i\varepsilon}\Big|_{\omega=2\Omega+i\varepsilon} + iH(t'-t)\ \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-2\Omega-i\varepsilon}\Big|_{\omega=-\Omega+i\varepsilon}$
$= iH(t'-t)\frac{e^{-\varepsilon(t-t')}}{3\Omega}\left(e^{2i\Omega(t-t')} - e^{-i\Omega(t-t')}\right)$
Im Limes $\varepsilon\to 0^-\ G_I^-(t,t') = H(t'-t)\frac{i}{3\Omega}\left(e^{2i\Omega(t-t')} - e^{-i\Omega(t-t')}\right)$
c) $G_0(t,t') = G_I^+(t,t') - G_I^-(t,t')$
$= H(t-t')\frac{i}{3\Omega}\left(e^{-i\Omega(t-t')} - e^{2i\Omega(t-t')}\right) - H(t'-t)\frac{i}{3\Omega}\left(e^{2i\Omega(t-t')} - H(t'-t)e^{-i\Omega(t-t')}\right)$
$= \frac{i}{3\Omega}\left(e^{-i\Omega(t-t')} - e^{2i\Omega(t-t')}\right)$
Anmerkung : Lösung ohne Fouriertransformation
allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $\mathcal{L}_t x(t) = 0 : x(t) = Ae^{2i\Omega t} + Be^{-i\Omega t}$
Greensche Funktion : $G(t,t') = \begin{cases} A_1(t')e^{2i\Omega t} + B_1(t')e^{-i\Omega t} & (t<t') \\ A_2(t')e^{2i\Omega t} + B_2(t')e^{-i\Omega t} & (t'<t)\end{cases}$
i) Translationsinvarianz $G(t,t') = G(t-t',0) = \begin{cases} A_1(0)e^{2i\Omega(t-t')} + B_1(0)e^{-i\Omega(t-t')} & (t<t') \\ A_2(0)e^{2i\Omega(t-t')} + B_2(0)e^{-i\Omega(t-t')} & (t'<t)\end{cases}$
ii) Stetigkeit der Greenschen Funktion : $A_1(0)+B_1(0) = A_2(0)+B_2(0)$
iii) $\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon}\mathcal{L}_t G(t,t')dt = \lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{d}{dt}G(t,t')\Big|_{t=t'-\varepsilon}^{t=t'+\varepsilon} = 2i\Omega(A_2(0)-A_1(0)) - i\Omega(B_2(0)-B_1(0)) = 1$
$\to A_2(0) = A_1(0) + 1/(3i\Omega),\ B_2(0) = B_1(0) - 1/(3i\Omega)$
$\to G(t,t') == \begin{cases} A_1(0)e^{2i\Omega(t-t')} + B_1(0)e^{-i\Omega(t-t')} & (t<t') \\ A_1(0)e^{2i\Omega(t-t')} + B_1(0)e^{-i\Omega(t-t')} + 1/(3i\Omega)(e^{2i\Omega(t-t')} - e^{-i\Omega(t-t')}) & (t'<t)\end{cases}$
Wenn $A_1(0) = B_1(0) = 0$, $G(t,t') = G_I^+(t,t')$.
Wenn $A_1(0) = -B_1(0) = -1/(3i\Omega)$, $G(t,t') = G_I^-(t,t')$.

8.3 Separationsansatz

a) (siehe Bsp.5.1)
Kartesische Koordinaten : $x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z$ Kugelkoordinaten: $x'^1 = r,\ x'^2 = \theta,\ x'^3 = \phi$
$\begin{pmatrix}\mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}'_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\end{pmatrix}\mathbf{S}$ mit $\mathbf{S} = \begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & \end{pmatrix}$ $(s^i{}_j = \partial'_j x^i)$
$\mathbf{g}' = \mathbf{S}^T\mathbf{S} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta\end{pmatrix}$
$\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}} = r^2\sin\theta$
$\nabla^2\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\partial_r\left(r^2\sin\theta\partial_r\psi(\mathbf{x})\right) + \partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta\psi(\mathbf{x})\right) + \partial_\phi\left((\sin\theta)^{-1}\partial_\phi\psi(\mathbf{x})\right)\right)$
$= \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\psi(\mathbf{x})\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta\psi(\mathbf{x})\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\phi^2\psi(\mathbf{x})$
b) Ansatz: $\psi(\mathbf{x}) = R(r)Q(\theta)F(\phi)$
Differentialgleichung $(\mathcal{L}_rR)QF + r^{-2}(\mathcal{L}_\theta Q)RF + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}(\mathcal{L}_\phi F)RQ + \frac{2}{r}RQF = -2ERQF$
mit $\mathcal{L}_r = r^{-2}\partial_r(r^2\partial_r)$, $\mathcal{L}_\theta = \sin^{-1}\theta\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta)$, und $\mathcal{L}_\phi = \partial_\phi^2$.
multiplizieren mit $r^2/(RQF) : r^2R^{-1}\mathcal{L}_rR + Q^{-1}\mathcal{L}_\theta Q + \frac{1}{\sin^2\theta}F^{-1}\mathcal{L}_\phi F + 2r = -2Er^2$
$\to r^2R^{-1}\mathcal{L}_rR + 2r + 2Er^2 = -Q^{-1}\mathcal{L}_\theta Q - \frac{1}{\sin^2\theta}F^{-1}\mathcal{L}_\phi F$
linke Seite: Funktion von r, rechte Seite: Funktion von θ,ϕ
$\to$ Die Gleichung gilt für beliebige r,θ,ϕ nur wenn die beide Seiten konstant sind (unabhängig von r,θ,ϕ).
$r^2R^{-1}\mathcal{L}_rR + 2r + 2Er^2 = Z_1 \to \mathcal{L}_rR + (2/r)R - (Z_1/r^2)R + 2ER = 0$
$-Q^{-1}\mathcal{L}_\theta Q - \frac{1}{\sin^2\theta}F^{-1}\mathcal{L}_\phi F = Z_1$
multiplizieren mit $-\sin^2\theta \to \sin^2\theta Q^{-1}\mathcal{L}_\theta Q + Z_1\sin^2\theta = -F^{-1}\mathcal{L}_\phi F$
Die Gleichung gilt für beliebige θ,ϕ nur wenn die beide Seiten konstant sind (unabhängig von θ,ϕ).

$\sin^2\theta Q^{-1}\mathcal{L}_\theta Q + Z_1\sin^2\theta = Z_2 \to \mathcal{L}_\theta Q + Z_1 Q - \frac{Z_2}{\sin^2\theta}Q = 0$ und $\mathcal{L}_\phi F = -Z_2 F$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r R(r)\right) + \dfrac{Z_1}{2r^2}R(r) - \dfrac{1}{r}R(r) = ER(r) \\ \dfrac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta Q(\theta)\right) + Z_1 Q(\theta) - \dfrac{Z_2}{\sin^2\theta}Q(\theta) = 0 \\ \partial_\phi^2 F = -Z_2 F \end{cases}$$

c) $u = \cos\theta + 1$, $P(u) = Q(\theta)$

$\frac{d}{d\theta} = \frac{du}{d\theta}\frac{d}{du} = -\sin\theta\frac{d}{du}$

$\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta Q(\theta)\right) + Z_1 Q(\theta) - \frac{Z_2}{\sin^2\theta}Q(\theta) = 0 \to -\partial_u\left(-\sin^2\theta\partial_u P(u)\right) + Z_1 P(u) - \frac{Z_2}{\sin^2\theta}P(u) = 0$

$\to \partial_u\left((2u-u^2)\partial_u P(u)\right) + Z_1 P(u) - \frac{Z_2}{2u-u^2}P(u) = 0$

d) Wenn $Z_2 = 0$, $Z_1 = \ell(\ell+1)$,

$\partial_u\left((2u-u^2)\partial_u P(u)\right) + \ell(\ell+1)P(u) = 0$

$\to u(2-u)P''(u) + 2(1-u)P'(u) + \ell(\ell+1)P(u) = 0$

Ansatz : $P(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^{n+\sigma}$ $(a_0 \neq 0)$

$\sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(n+\sigma)(n+\sigma-1)u^{n+\sigma-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\sigma)(n+\sigma-1)u^{n+\sigma} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(n+\sigma)u^{n+\sigma-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(n+\sigma)u^{n+\sigma} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\ell(\ell+1)u^{n+\sigma} = 0$

$\sum_{n=-1}^{\infty} 2a_{n+1}(n+\sigma+1)(n+\sigma)u^{n+\sigma} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\sigma)(n+\sigma-1)u^{n+\sigma} + \sum_{n=-1}^{\infty} 2a_{n+1}(n+\sigma+1)u^{n+\sigma} - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(n+\sigma)u^{n+\sigma} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\ell(\ell+1)u^{n+\sigma} = 0$

Die Gleichung gilt für beliebige u.

Koeffizientenvergleich von $u^{\sigma-1}$ Term: $2a_0\sigma(\sigma-1) + 2a_0\sigma = 0$. Da $a_0 \neq 0$, $\sigma = 0$.

Weiterer Koeffizientenvergleich von u^{n+1} $(n \geq 1)$ Terme

$2n(n+1)a_{n+1} - n(n-1)a_n + 2(n+1)a_{n+1} - 2na_n + \ell(\ell+1)a_n = 0$

$2(n+1)^2 a_{n+1} - n(n+1)a_n + \ell(\ell+1)a_n = 0$

$a_{n+1} = \frac{n(n+1)-\ell(\ell+1)}{2(n+1)^2}a_n = \frac{(n-\ell)(n+\ell+1)}{2(n+1)^2}a_n$

Anmerkung: Lösung der Rekursionsgleichung (ℓ: Ganzzahl)

$a_1 = -\frac{\ell(\ell+1)}{2}a_0$, $a_2 = -\frac{(\ell-1)(\ell+2)}{2\cdot 2^2}a_1 = \frac{(\ell-1)\ell(\ell+2)(\ell+1)}{2^2\cdot(2\cdot 1)^2}a_0, \cdots,$

$a_n = (-1)^n\frac{[(\ell-n+1)\cdots(\ell-1)\ell][(\ell+n)\cdots(\ell+2)(\ell+1)]}{2^n(n!)^2}a_0 = (-1)^n\frac{(\ell+n)!}{2^n(n!)^2(\ell-n)!}a_0$ $(n \leq \ell)$,

$a_{\ell+1} = 0 \cdots a_\ell = 0 \to a_n = 0$ $(n > \ell)$

$P(u) = \sum_{n=0}^{\ell}(-1)^n\frac{(\ell+n)!}{2^n(n!)^2(\ell-n)!}a_0 u^n$ (verschobenes Legendre-Polynom)