9. Tutorium **für 11.1.2019**

9.1 Gamma- und Beta-Funktionen

a) Leite, ausgehend vom Euler-Integral $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$, die Beziehung $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ her.
b) Schreibe den Ausdruck

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+2m-1)(n+2m)}{[2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots(2m-2)(2m)][(2n+3)(2n+5)(2n+7)\cdots(2n+2m+1)]}$$

mithilfe der Gamma-Funktion um (n, m: positive ganze Zahl).
c) Schreibe, mithilfe der Gamma-Funktion, das Integral

$$\int_0^\infty v^n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/(2kT)} 4\pi v^2 dv$$

um (n : ganze Zahl, m, k, T : positive Konstanten).
d) Zeige für ein reelles γ

$$|e^{-\pi\gamma/2}\Gamma(1+i\gamma)|^2 = \frac{2\pi\gamma}{e^{2\pi\gamma}-1}\,.$$

(Hinweise: $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z)$)
e) Schreibe das Integral $\int_0^{\pi/2} \cos^n\theta d\theta$ mithilfe der Beta-Funktion um und berechne $\int_0^{\pi/2} \cos^3\theta d\theta$. (Hinweise: $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$)

9.2 Frobenius-Methode

a) Verwende den Ansatz $y(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^{n+\sigma}$ ($a_0 \neq 0$) und bestimme die charakteristischen Exponenten σ der Differentialgleichung

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0\,.$$

b) Berechne die allgemeine Lösung der Differentialgleichung, wenn p keine ganze Zahl ist, und auch $p \neq \pm 1/2$.
c) Berechne die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für $p = 1/2$. (Hinweise : Berechne die Lösung für beide charakteristischen Exponenten.)

9.3 Legendre-Polynome

a) Die Legendre-Polynome $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \cdots$ sind orthogonal auf dem Intervall $[-1,1]$ (d.h. $\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$). Nimm an, dass für das Intervall $[-1,1]$ die Entwicklung der Delta-Distribution mit den Legendre-Polynomen durch

$$\delta(x-t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(t)P_m(x)$$

gegeben ist. Berechne das Integral $\int_{-1}^{1} \delta(x-t)P_n(x)dx$ und zeige $a_n(t) = (n+1/2)P_n(t)$.

b) Betrachte einen Vektorraum $\mathcal{V}$, der von der Familie der Legendre-Polynome $\mathcal{P} = \{P_0(x), P_1(x), P_2(x), \cdots, P_N\}$ aufgespannt wird. Ein Polynom $F(x) = \sum_{n=0}^{N} f_n P_n(x)$ im Vektorraum $\mathcal{V}$ wird in einer anderen Basis $\mathcal{Q} = \{Q_0(x), Q_1(x), Q_2(x), \cdots, Q_N\}$ mit $F(x) = \sum_{i=0}^{N} f'_i Q_i(x)$ umgeschrieben. Nimm an, dass die Polynome $Q_i(x)$ orthogonal ($\int_{-1}^{1} Q_i(x)Q_j(x)dx = w_i^{-1}\delta_{ij}$) sind wenn die Basistransformation durch $Q_i(x) = \sum_{n=0}^{N}(n+1/2)P_n(x_i)P_n(x)$ definiert ist ($-1 \leq x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N \leq 1$). Bestimme die Koeffizienten f'_i und zeige $f'_i = w_i F(x_i)$.

c) Zeige, dass für die Polynome $F(x)$ und $G(x)$, im von $\mathcal{Q}$ aufgespannten Vektorraum,

$$\int_{-1}^{1} F(x)G(x)dx = \sum_{i=0}^{N} w_i F(x_i)G(x_i)$$

gilt.

Ankreuzbar: 1a-c, 1de, 2ab, 2c, 3a, 3bc

Ein kurzer Ausblick auf zukünftige Semester: In allen Fächern der Physik werden viele Phänomene von Differentialgleichungen beschrieben. Die Eigenschaften der Differentialgleichungen werden im Rahmen des Sturm-Liouville-Problems, und des Separationsansatzes analysiert und die Greensche Funktion ist eine praktische Methode, um die Lösungen zu finden. Das Eigenwertproblem und das Spektraltheorem tauchen oft insbesondere in Quantentheorie (5. Sem) und Statistischer Physik (6. Sem) auf. Legendre-Polynome, Delta Distribution, Heaviside Funktion und andere spezielle Funktionen werden in Elektrodynamik (4. Semester) und Quantentheorie wiederkehren. Sie sind wichtige Grundlagen auch für numerische Rechnungen (wie z.B Gauß-Quadratur). Ko- und kontravariante Schreibweise werden in Elektrodynamik I & II für die spezielle Relativitätstheorie gebraucht. Die duale Basis erscheint in Form des reziproken Gitters in der Festkörperphysik (6. Sem). Die Gamma-Funktion wird in Statistischer Physik (6. Sem) eine wichtige Rolle spielen. Somit sollten die "Mathematischen Methoden" eine wichtige Grundlage für künftige theoretische Vorlesungen bieten.