**9. Tutorium - Lösungen** **11.1.2019**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel anzuschauen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

## 9.1 Gamma- und Beta-Funktionen

a) $\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt = -\left. t^z e^{-t}\right|_{t=0}^\infty + \int_0^\infty z t^{z-1} e^{-t} dt = z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z)$
b)
$(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+2m-1)(n+2m) = 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n+2m-1)(n+2m)/(1\cdot 2\cdot 3\cdots n)$
$= (n+2m)!/n! = \Gamma(n+2m+1)/\Gamma(n+1)$

$2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots(2m-2)(2m) = 2^m(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(m-1)m) = 2^m\Gamma(m+1)$

$(2n+3)(2n+5)(2n+7)\cdots(2n+2m+1) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n+2m+1)}{(2n+1)!(2n+2)(2n+4)(2n+6)\cdots(2n+2m)}$
$= \frac{(2n+2m+1)!}{(2n+1)!2^m(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+m)} = \frac{\Gamma(2n+2m+2)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)2^m\Gamma(n+m+1)}$

$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+2m-1)(n+2m)}{[2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots(2m-2)(2m)][(2n+3)(2n+5)(2n+7)\cdots(2n+2m+1)]} = \frac{\Gamma(n+2m+1)\Gamma(2n+2)2^m\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n+1)2^m\Gamma(m+1)\Gamma(2n+2m+2)\Gamma(n+1)}$
$= \frac{\Gamma(n+2m+1)\Gamma(2n+2)\Gamma(n+m+1)}{(\Gamma(n+1))^2\Gamma(m+1)\Gamma(2n+2m+2)} \left(\text{ oder } = \frac{\Gamma(n+2m+1)\Gamma(2n+3)\Gamma(n+m+1)}{2\Gamma(n+1)\Gamma(n+2)\Gamma(m+1)\Gamma(2n+2m+2)}\right)$ (Legendre-Funktion 2.Art)
c) $t = mv^2/(2kT) \to v = \sqrt{2kTt/m}$ und $dv = kT/(mv)dt$
$\int_0^\infty v^n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/(2kT)} 4\pi v^2 dv = 4\pi\left(\frac{2kT}{m}\right)^{(n+1)/2}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int_0^\infty t^{(n+1)/2}e^{-t}\frac{kT}{m}dt$
$= \frac{2}{\pi^{1/2}}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{n/2}\int_0^\infty t^{(n+1)/2}e^{-t}dt = \frac{2}{\pi^{1/2}}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{n/2}\Gamma((n+3)/2)\left(\text{ oder } = \left(\frac{2kT}{m}\right)^{n/2}\frac{\Gamma((n+3)/2)}{\Gamma(3/2)}\right)$
(Maxwell-Boltzmann-Verteilung)
d) $|e^{-\pi\gamma/2}\Gamma(1+i\gamma)|^2 = e^{-\pi\gamma}\Gamma(1+i\gamma)\Gamma(1-i\gamma) = e^{-\pi\gamma}i\gamma\Gamma(i\gamma)\Gamma(1-i\gamma) = e^{-\pi\gamma}i\gamma\pi/\sin(\pi i\gamma)$
$= -2e^{-\pi\gamma}\gamma\pi/(e^{-\pi\gamma}-e^{\pi\gamma}) = 2\gamma\pi/(e^{2\pi\gamma}-1)$
Anmerkung : $\psi(0) = e^{-\pi\gamma/2}\Gamma(1+i\gamma)$ ist die Wellenfunktion für die Streuung am Coulomb-Potential.
e) $t = \cos^2\theta$ (wenn $0 \le \theta \le \pi/2$, $1 \ge t \ge 0$) $\to dt = -2\cos\theta\sin\theta d\theta \to d\theta = -(1/2)t^{-1/2}(1-t)^{-1/2}dt$
$\int_0^{\pi/2}\cos^n\theta\, d\theta = \int_1^0 t^{n/2}\left(-\frac{1}{2}\right)t^{-1/2}(1-t)^{-1/2}dt = -\frac{1}{2}\int_1^0 t^{(n-1)/2}(1-t)^{-1/2}dt = \frac{1}{2}B((n+1)/2, 1/2)$
Wenn $n = 3$, $\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\Gamma(2)\Gamma(1/2)/\Gamma(5/2) = \frac{2}{3}$
Anmerkung : Rekursionsrelation für das Volmen $V_n$ einer $n$-dimensionalen Kugel mit Radius 1 :
$V_n = B((n+1)/2, 1/2)V_{n-1} \to$ Lösung $V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$

## 9.2 Frobenius-Methode (Besselsche Differentialgleichung)

a) $x^2y'' + xy' + (x^2-p^2)y = 0$
Ansatz : $y = \sum_{n=0}^\infty a_n x^{n+\sigma}$
$\sum_{n=0}^\infty a_n(n+\sigma)(n+\sigma-1)x^{n+\sigma} + \sum_{n=0}^\infty a_n(n+\sigma)x^{n+\sigma} + \sum_{n=0}^\infty a_n x^{n+\sigma+2} - \sum_{n=0}^\infty a_n p^2 x^{n+\sigma} = 0$
$\to \sum_{n=0}^\infty a_n(n+\sigma)(n+\sigma-1)x^{n+\sigma} + \sum_{n=0}^\infty a_n(n+\sigma)x^{n+\sigma} + \sum_{n=2}^\infty a_{n-2}x^{n+\sigma} - \sum_{n=0}^\infty a_n p^2 x^{n+\sigma} = 0$
Koeffizientenvergleich, $x^\sigma$ Term : $a_0\sigma(\sigma-1) + a_0\sigma - a_0p^2 = a_0(\sigma^2-p^2) = 0$. Da $a_0 \ne 0$, $\sigma = \pm p$
b) Koeffizientenvergleich
$x^{\sigma+1}$ Term : $a_1(\sigma+1)\sigma + a_1(\sigma+1) - a_1p^2 = a_1(2\sigma+1) = 0 \to a_1 = 0$ oder $\sigma = -1/2$
$x^{\sigma+n}$ Term $(n > 1)$ : $a_n(n+\sigma)(n+\sigma-1) + a_n(n+\sigma) + a_{n-2} - p^2a_n = 0$
$\to a_n(n+\sigma)^2 + a_{n-2} - p^2a_n = 0 \to a_n = -a_{n-2}\frac{1}{(n+\sigma)^2-p^2} = -a_{n-2}\frac{1}{n(n+2\sigma)}$
Wenn $\sigma = p$, $a_n = -a_{n-2}\frac{1}{n(n+2p)}$
$a_1 = 0 \to a_{2m+1} = 0$ $(m = 0, 1, 2, \cdots)$
$a_{2m} = -a_{2(m-1)}\frac{1}{4m(m+p)} = a_{2(m-2)}\frac{1}{4m(m+p)}\frac{1}{4(m-1)(m+p-1)} = \cdots = (-1)^m a_0\frac{1}{4^m m!(m+p)(m+p-1)\cdots(p+1)}$
$= (-1)^m a_0\frac{\Gamma(p+1)}{4^m\Gamma(m+1)\Gamma(m+p+1)}$
$y_1(x) = a_0\sum_{m=0}^\infty(-1)^m\frac{\Gamma(p+1)}{4^m\Gamma(m+1)\Gamma(m+p+1)}x^{2m+p}$
Wenn $\sigma = -p$, $a_n = -a_{n-2}\frac{1}{n(n-2p)}$

$a_1 = 0 \to a_{2m+1} = 0\ (m = 0, 1, 2, \cdots)$
$a_{2m} = -a_{2(m-1)} \frac{1}{4m(m-p)} = a_{2(m-2)} \frac{1}{4m(m-p)} \frac{1}{4(m-1)(m-p-1)} = \cdots = (-1)^m a_0 \frac{1}{4^m m!(m-p)(m-p-1)\cdots(-p+1)}$
$= (-1)^m a_0 \frac{\Gamma(1-p)}{4^m \Gamma(m+1)\Gamma(m-p+1)}$
$y_2(x) = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\Gamma(1-p)}{4^m \Gamma(m+1)\Gamma(m-p+1)} x^{2m-p}$
$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{4^m \Gamma(m+1)} x^{2m} \left( A \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(m+p+1)} x^p + B \frac{\Gamma(-p+1)}{\Gamma(m-p+1)} x^{-p} \right)$
Anmerkung : In der Potenzreihen können $y_1(x)$ und $y_2(x)$ gleiche Potenzen haben nur wenn $p$ eine ganze Zahl ist (d.h $2m + p = 2m' - p \to p = m' - m$). Für nicht-ganzzahliges $p$ sind $y_1(x)$ und $y_2(x)$ unabhängig voneinander.
c) $p = 1/2$
Wenn $\sigma = p = 1/2$, $a_n = -a_{n-2} \frac{1}{n(n+1)}$
$a_1 = 0 \to a_{2m+1} = 0\ (m = 0, 1, 2, \cdots)$
$a_{2m} = -a_{2(m-1)} \frac{1}{2m(2m+1)} = a_{2(m-2)} \frac{1}{(2m+1)2m} \frac{1}{(2m-1)(2m-2)} = \cdots = (-1)^m a_0 \frac{1}{(2m+1)2m(2m-1)(2m-2)\cdots 3\cdot 2}$
$= (-1)^m a_0 \frac{1}{(2m+1)!}$
$y_1(x) = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!} x^{2m+1/2} = a_0 x^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!} x^{2m+1} = a_0 x^{-1/2} \sin x$
Wenn $\sigma = -p = -1/2$, $a_n = -a_{n-2} \frac{1}{n(n-1)}$
$a_1$ muss nicht null sein. $\to a_{2m+1} = -a_{2m-1} \frac{1}{(2m+1)2m} = \cdots = (-1)^m a_1 \frac{1}{(2m+1)2m\cdots 3\cdot 2} = (-1)^m a_1 \frac{1}{(2m+1)!}$
$a_{2m} = -a_{2(m-1)} \frac{1}{2m(2m-1)} = a_{2(m-2)} \frac{1}{2m(2m-1)} \frac{1}{(2m-2)(2m-3)} = \cdots = (-1)^m a_0 \frac{1}{2m(2m-1)(2m-2)\cdots 2\cdot 1} = (-1)^m a_0 \frac{1}{(2m)!}$
$y_2(x) = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{(2m)!} x^{2m-1/2} + a_1 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!} x^{2m+1/2} = a_0 x^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{(2m)!} x^{2m} + a_1 x^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!} x^{2m+1} = a_0 x^{-1/2} \cos x + a_1 x^{-1/2} \sin x$
Allgemeine Lösung : $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x) = A' x^{-1/2} \cos x + B' x^{-1/2} \sin x$

## 9.3 Legendre-Polynome

a)
A: $\int_{-1}^{1} \delta(x-t) P_n(x) dx = P_n(t)$
B: $\delta(x-t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(t) P_m(x) \to \int_{-1}^{1} \delta(x-t) P_n(x) dx = \int_{-1}^{1} \sum_{m=0}^{\infty} a_m(t) P_m(x) P_n(x) dx$
$= \sum_{m=0}^{\infty} a_m(t) \frac{2}{2n+1} \delta_{nm} = \frac{2}{2n+1} a_n(t)$
A=B $\to P_n(t) = \frac{2}{2n+1} a_n(t) \to a_n(t) = \frac{2n+1}{2} P_n(t)$
b)
A: $\int_{-1}^{1} F(x) Q_i(x) dx = \int_{-1}^{1} \sum_{n=0}^{N} f_n P_n(x) \sum_{m=0}^{N} \frac{2m+1}{2} P_m(x_i) P_m(x) dx$
$= \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} f_n \frac{2m+1}{2} P_m(x_i) \int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} f_n \frac{2m+1}{2} P_m(x_i) \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}$
$= \sum_{n=0}^{N} f_n P_n(x_i) = F(x_i)$
B: $\int_{-1}^{1} F(x) Q_i(x) dx = \int_{-1}^{1} \sum_{j=0}^{N} f'_j Q_j(x) Q_i(x) dx = \sum_{j=0}^{N} f'_j w_i^{-1} \delta_{ij} = f'_i w_i^{-1}$
A=B $\to f'_i = w_i F(x_i)$
Altenative:
$Q_i(x) = \sum_n s_{ni} P_n(x)$ mit der Transformationmatrix $s_{ni} = (n + 1/2) P_n(x_i)$
Orthogonalität : $\int_{-1}^{1} Q_i(x) Q_j(x) dx = \sum_{n,m} \int_{-1}^{1} s_{ni} P_n(x) s_{mj} P_m(x) dx = \sum_n s_{ni} s_{nj} 2/(2n+1) = w_i^{-1} \delta_{ij}$
$\to$ Wenn $\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}$, $\sum_n t_{ni} s_{nj} = \delta_{ij} \to t_{ni} = s_{ni} 2w_i/(2n+1) = w_i P_n(x_i)$
$f'_i = \sum_n f_n t_{ni} = \sum_n f_n w_i P_n(x_i) = w_i F(x_i)$
c)
$F(x) = \sum_{i=1}^{N} w_i F(x_i) Q_i(x)$, $G(x) = \sum_{i=1}^{N} w_i G(x_i) Q_i(x)$,
$\int_{-1}^{1} F(x) G(x) dx = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_i w_j F(x_i) G(x_j) \int_{-1}^{1} Q_i(x) Q_j(x) dx = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_i w_j F(x_i) G(x_j) w_i^{-1} \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{N} w_i F(x_i) G(x_i)$
Anmerkung :
$Q_i(x)$ ist eine Delta-Folge. $\lim_{N\to\infty} Q_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1/2) P_n(x_i) P_n(x) = \delta(x - x_i)$ (Bsp.8.2a)
Wenn $N \gg 1$, gilt annähernd $Q_i(x) \simeq \delta(x - x_i)$ (oder für endliches $N$, Höhe $\times$ Breite $\sim Q_i(x_i) w_i \sim 1$)
$\to$ Bsp.8.2b $\int_{-1}^{1} F(x) Q_i(x) dx = F(x_i)$
Wenn $\{x_0, x_1, \cdots, x_N\}$ die $N+1$ Nullstellen des Legendre-Polynoms $P_{N+1}(x)$ ist, ist die Basistransformation $s_{ni} = P_n(x_i)$ eine orthogonale Transformation. Das Endergebnis $\int_{-1}^{1} F(x) G(x) dx = \sum_{i=0}^{N} w_i F(x_i) G(x_i)$ ist als Gauss-Quadratur bekannt und wird oft für numerische Rechnungen von Integralen verwendet.