Name: Tutoriumsgruppe: Matr. Nr.:

Anzahl der abgegebenen Blätter (inkl. Deckblatt):

Mathematische Methoden der Theoretischen Physik (UE, 135.044)

1. Test, 29. 11. 2019, 2019W

1 Rechenbeispiele (30 Punkte)

(6 Punkte pro Frage)

a) Berechnen Sie

$$\partial_i \left(\frac{x_i}{x_j x_j} \right)$$

für einen 3-dimensionalen Vektor $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$ in einer orthonormalen Basis.

b) Berechnen Sie die dualen Basisvektoren $\mathbf{f}^1$ und $\mathbf{f}^2$ zur Basis $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{f}_2 = -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$. $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ ist eine orthonormale Basis.

c) Schreiben Sie mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols die Determinante $\det(\mathbf{A})$ für die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_i & \mathbf{e}_j & \mathbf{e}_k \end{pmatrix}$$

wobei

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

d) Berechnen Sie $g^{ij} g_{ij}$. ($\mathbf{g} = (g_{ij})$ und $\mathbf{g}^* = (g^{ij})$ sind die metrischen Tensoren eines Koordinatensystems in d Dimensionen.)

e) $\mathbf{E}_a$ und $\mathbf{E}_b$ seien die Projektoren auf die Vektoren $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ und $\mathbf{b} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$. Berechnen Sie $\mathbf{E}_b \mathbf{E}_a^2 \mathbf{x}$ für $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$. $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ ist die zwei-dimensionale orthonormale Basis.

BITTE WENDEN

2 Tensoren (38 Punkte)

Die Komponenten eines kontravarianten Tensors zweiter Stufe $\mathbf{A}$ bezüglich einer orthonormalen Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ lauten

$$\begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} \\ a^{21} & a^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 ($\lambda_2 > \lambda_1$) der Matrix (a^{ij}).
b) Berechnen Sie die normierten Eigenvektoren $\mathbf{e}'_1$ und $\mathbf{e}'_2$ des Tensors $\mathbf{A}$ (d.h. $\mathbf{A}\mathbf{e}'_1 = \lambda_1 \mathbf{e}'_1$ und $\mathbf{A}\mathbf{e}'_2 = \lambda_2 \mathbf{e}'_2$).
c) Wie lauten die Komponenten a'^{ij} des Tensors $\mathbf{A}$ bezüglich der Eigenbasis $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$?
d) Berechnen Sie die Komponenten b^{ij} des Tensors $\mathbf{B} = \mathbf{A}^n$ bezüglich der Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.
e) Finden Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

mit der Anfangsbedingung $\mathbf{x}(t = 0) = \mathbf{e}_1$.

3 Lokale Transformation (32 Punkte)

In der Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ eines kartesischen Koordinatensystems ist eine infinitesimale Änderung eines Vektors $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$ durch $\mathbf{dx} = dx^i \mathbf{e}_i$ gegeben.
a) Die infinitesimale Änderung $\mathbf{dx}$ wird mit den Kugelkoordinaten $(x'^1, x'^2, x'^3) = (r, \theta, \phi)$ dargestellt, d.h. $\mathbf{dx} = dx'^i \mathbf{e}'_i$. Berechnen Sie die Transformationsmatrix $\mathbf{S} = (s^j{}_i)$ der Basisvektoren, wobei $\mathbf{e}'_i = s^j{}_i \mathbf{e}_j$. Die Transformation zwischen den kartesischen Koordinaten (x^1, x^2, x^3) und den Kugelkoordinaten ist durch (x^1, x^2, x^3) $= (r \sin\theta \cos\phi,\ r \sin\theta \sin\phi,\ r\cos\theta)$ definiert. ($r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi < 2\pi$)
b) Berechnen Sie den metrischen Tensor $\mathbf{g}' = (g'_{ij})$ der Kugelkoordinaten und zeigen Sie, dass $|\det(\mathbf{S})| = \sqrt{\det(\mathbf{g}')} = r^2 \sin\theta$.
c) Das Volumenelement dV des Kugelkoordinatensystems ist als das Volumen des von den 3 Vektoren $dx'^1 \mathbf{e}'_1$, $dx'^2 \mathbf{e}'_2$, $dx'^3 \mathbf{e}'_3$ aufgespannten Parallelepipedes definiert. Berechnen Sie dV und zeigen Sie, dass $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$.
d) Zeigen Sie, dass für ein ortsabhängiges Vektorfeld $\mathbf{w} = w'^i(\mathbf{x})\mathbf{e}'_i$ gilt $\nabla \cdot \mathbf{w} = G^{-1}\partial'_i(G w'^i)$ wobei $G = \sqrt{\det(\mathbf{g}')}$. (Hinweis: $\nabla \cdot (G^{-1}\mathbf{e}'_i) = 0$)
e) Berechnen Sie für das Vektorfeld $\mathbf{w} = r^2 \cos^2\phi \mathbf{e}'_1 + r^2 \sin^2\phi \mathbf{e}'_3$ und die Kugel $V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$ das Volumenintegral

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{w}) dV .$$