1. Tutorium - Lösungen **11.10.2019**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel anzuschauen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

1.1 Indexschreibweise

Vorbemerkung: Beachte, dass hier die folgende Schreibweise verwendet wird: "$\mathbf{A} = (a_{ij})$"
Die Matrix $\mathbf{A}$ hat in zwei Dimensionen vier Einträge: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.
Die i-te Zeile und die j-te Spalte der Matrix lässt sich sauber so darstellen: $(\mathbf{A})_{ij} = a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{ij}$, also $(\mathbf{A})_{11} = a_{11}$, $(\mathbf{A})_{12} = a_{12}$, etc. Wenn es nur zwei freie Indizes gibt, und auch keine Gefahr der Vertauschung besteht (etwa wegen alphabetischer Reihenfolge der Indizes), wird das zuweilen verkürzt zu $\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

a) $a_{ij}b_{jk} = \sum_{j=1}^{2} a_{ij}b_{jk} = (\mathbf{AB})_{ik} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}_{ik}$

b) $a_{jk}c_{ik} = (\mathbf{AC}^T)_{ji} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right]_{ji} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}_{ji}$

c) $a_{ij}a_{kl}c_{kj}b_{li} = a_{ij}c_{kj}a_{kl}b_{li} = (\mathbf{AC}^T)_{ik}(\mathbf{AB})_{ki} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}_{ik}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}_{ki} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}_{ii} = -2$

d) $(\mathbf{A}^T\mathbf{B}\mathbf{C}^T\mathbf{D})_{im} = (\mathbf{A}^T)_{ij}(\mathbf{B})_{jk}(\mathbf{C}^T)_{k\ell}(\mathbf{D})_{\ell m} = a_{ji}b_{jk}c_{\ell k}d_{\ell m}$

e) $(\mathbf{D}^T\mathbf{C}\mathbf{B}^T\mathbf{A})_{mi} = (\mathbf{D}^T)_{m\ell}(\mathbf{C})_{\ell k}(\mathbf{B}^T)_{kj}(\mathbf{A})_{ji} = d_{\ell m}c_{\ell k}b_{jk}a_{ji} = a_{ji}b_{jk}c_{\ell k}d_{\ell m}$ (siehe d).

Hinweis : $\mathbf{D}^T\mathbf{C}\mathbf{B}^T\mathbf{A} = (\mathbf{A}^T\mathbf{B}\mathbf{C}^T\mathbf{D})^T$

1.2 Skalarprodukt

a) $\frac{2}{L}\int_0^L \sin(\lambda_k x)\sin(\lambda_\ell x)dx = \frac{1}{L}\int_0^L (\cos(\lambda_k x - \lambda_\ell x) - \cos(\lambda_k x + \lambda_\ell x))\,dx$

Wenn $k = \ell$, $\frac{2}{L}\int_0^L \sin(\lambda_k x)\sin(\lambda_\ell x)dx = \frac{1}{L}\int_0^L (1 - \cos(2\lambda_k x))\,dx = 1$

($\int_0^L \cos(\Lambda x)dx = \frac{1}{\Lambda}\sin(\Lambda x)\Big|_0^L = 0$ wenn $\Lambda = \pi k/L$ mit k Ganzzahl.)

Wenn $k \neq \ell$, $\frac{2}{L}\int_0^L \sin(\lambda_k x)\sin(\lambda_\ell x)dx = \frac{1}{L}\int_0^L (\cos((\lambda_k - \lambda_\ell)x) - \cos((\lambda_k + \lambda_\ell)x))\,dx = 0$

b) Skalarprodukt :

$\langle f|g\rangle = \int_0^L f(x)g(x)dx = \frac{2}{L}\int_0^L \sum_{k=1}^N \sum_{\ell=1}^N a_k b_\ell \sin(\lambda_k x)\sin(\lambda_\ell x)dx = \sum_{k=1}^N \sum_{\ell=1}^N a_k b_\ell \frac{2}{L}\int_0^L \sin(\lambda_k x)\sin(\lambda_\ell x)dx$
$= \sum_{k=1}^N \sum_{\ell=1}^N a_k b_\ell \delta_{\ell k} = \sum_{k=1}^N a_k b_k$

1.3 Basis

a,b)

i) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \to$ lineare unabhängige Vektoren (Basis) $\to$ Flächeninhalt $= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$

ii) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0 \to$ lineare abhängige Vektoren

iii) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0 \to$ lineare abhängige Vektoren

c,d)

i) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 2 + 0 - 0 - 0 - 4 = 0 \rightarrow$ lineare abhängige Vektoren

ii) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 + 0 - 0 - 0 - 1 = 1 \rightarrow$ lineare unabhängige Vektoren (Basis)

$\rightarrow$ Volumen $= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$

iii) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 0 - 0 - 0 - 2 = 0 \rightarrow$ lineare abhängige Vektoren