2. Tutorium **für 18.10.2019**

2.1 Kronecker-Delta

a) Berechne $\delta_{ii} - \delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{ki} + \delta_{ii}\delta_{jj}\delta_{kk}$ mit dem Kronecker-Delta in d Dimensionen.
b) Berechne $x_i y_j \delta_{ji}$ für die Vektoren $\mathbf{x} = (1, 2, 1)$ und $\mathbf{y} = (3, -1, 2)$.
c) Berechne $a_{ij} b_{jk} a_{ik}$ für die Matrizen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.2 Transformationsmatrix

Die Koordinaten eines Vektors $\mathbf{x}$ sind in einer orthonormalen Basis, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ mit $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, durch $\mathbf{x} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2\,\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$ gegeben.
a) Gegeben seien 2 neue Vektoren $\mathbf{e}'_1 = 2^{-1/2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$ und $\mathbf{e}'_2 = 2^{-1/2}(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$. Schreiben Sie die Transformationsmatrix $\mathbf{S}$ an, wobei die Matrix $\mathbf{S}$ durch

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \mathbf{S}$$

definiert ist. Überprüfe, dass die Vektoren, $\mathbf{e}'_1$ und $\mathbf{e}'_2$, linear unabhängig sind.
b) Zeige, dass die neue Basis $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ orthonormal (d.h. $\langle \mathbf{e}'_i | \mathbf{e}'_j \rangle = \delta_{ij}$) ist.
c) Der Vektor $\mathbf{x}$ ist in der neuen Basis, $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$, mit $\mathbf{x} = x'^1 \mathbf{e}'_1 + x'^2\,\mathbf{e}'_2$ dargestellt. Bestimme die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$, wobei

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

und zeige, dass gilt $\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}$.
d) Der Vektor $\mathbf{x}$ wird in noch einer anderen Basis $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$, durch $\mathbf{x} = x''^1 \mathbf{f}_1 + x''^2\,\mathbf{f}_2$ dargestellt. Die neuen Koordinaten sind durch $x''^1 = (2x^1 + x^2)$ und $x''^2 = (2x^1 - x^2)$ definiert. Bestimme die Transformationsmatrizen, $\mathbf{T}_f$ und $\mathbf{S}_f$, wobei

$$\begin{pmatrix} x''^1 \\ x''^2 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_f \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \mathbf{S}_f$$

und überprüfe die Orthonormalität der Basis $\mathbf{f}_i$ $(i = 1, 2)$.
e) Berechne die Koordinaten (x'^1, x'^2) und (x''^1, x''^2) für $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ (d.h. $x^1 = 1$ und $x^2 = 2$).

2.3 Duale Basis

Die duale Basis $\{\mathbf{f}_1^*, \mathbf{f}_2^*\} := \{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2\}$ wird über $[\mathbf{f}_i^*, \mathbf{f}_j] = \mathbf{f}_i^* \cdot \mathbf{f}_j = \delta_{ij}$ bzw. $[\mathbf{f}^i, \mathbf{f}_j] = \mathbf{f}^i \cdot \mathbf{f}_j = \delta^i_j$ definiert. Der Vektor $\mathbf{x} = x''^i \mathbf{f}_i$ wird in der dualen Basis mit $\mathbf{x} = x''_i \mathbf{f}^i$ dargestellt.
a) Bestimme die dualen Basisvektoren $\{\mathbf{e}'^1, \mathbf{e}'^2\}$ zur Basis $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ aus Bsp.2.2.
b) Bestimme die dualen Basisvektoren $\{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2\}$ zur Basis $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ aus Bsp.2.2 und schreibe die Transformationsmatrizen $\mathbf{S}_f^*$ und $\mathbf{T}_f^*$ an, wobei

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix} = \mathbf{S}_f^* \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x''_1 & x''_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \mathbf{T}_f^* .$$

c) Berechne die Skalarprodukte $\langle \mathbf{e}'^i | \mathbf{x} \rangle$ und $\langle \mathbf{f}^i | \mathbf{x} \rangle$ $(i = 1, 2)$ für $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ und überprüfe, dass gilt $x'^i = \langle \mathbf{e}'^i | \mathbf{x} \rangle$ und $x''^i = \langle \mathbf{f}^i | \mathbf{x} \rangle$ (siehe Bsp.2.2e).
d) Berechne die Länge des Vektors $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ in allen drei Koordinaten, d.h. $x^i x_i$, $x'^i x'_i$, und $x''^i x''_i$.

Ankreuzbar: 1a-c, 2a-c, 2de, 3ab, 3c, 3d