2. Tutorium - Lösungen **18.10.2019**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel anzuschauen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

2.1 Kronecker-Delta

a) $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \cdots + \delta_{dd} = 1 + 1 + \cdots + 1 = d$, $\delta_{ii}\delta_{jj}\delta_{kk} = ddd = d^3$, $\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{ki} = \delta_{ik}\delta_{ki} = \delta_{ii} = d$
$\rightarrow \delta_{ii} - \delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{ki} + \delta_{ii}\delta_{jj}\delta_{kk} = d - d + d^3 = d^3$
b) $x_i y_j \delta_{ji} = x_i y_i = 3 - 2 + 2 = 3$
c) $a_{ij} b_{jk} a_{ik} = a_{ij} \delta_{jk} a_{ik} = a_{ij} a_{ij} = \mathrm{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)$
oder $a_{ij} b_{jk} a_{ik} = \mathrm{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^T) = \mathrm{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)$

$$\rightarrow \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow \mathrm{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = 5$

Alternative:

$$a_{ij} a_{ij} = \langle \mathbf{a}_j | \mathbf{a}_j \rangle \text{ mit } \mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \end{pmatrix} \rightarrow \langle \mathbf{a}_j | \mathbf{a}_j \rangle = 2 + 1 + 2 = 5$$

2.2 Transformationsmatrix

a) $\mathbf{e}'_1 = 2^{-1/2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{-1/2} \\ 2^{-1/2} \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}'_2 = 2^{-1/2}(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2^{-1/2} \\ 2^{-1/2} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{S} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Alternative : $\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^1{}_1 & s^1{}_2 \\ s^2{}_1 & s^2{}_2 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_j s^j{}_i$

$\rightarrow s^1{}_2 = -2^{-1/2}$, $s^1{}_1 = s^2{}_1 = s^2{}_2 = 2^{-1/2}$
$\det\mathbf{S} = 1/2 + 1/2 = 1 \rightarrow$ linear unabhängig

b) $$\begin{pmatrix} \langle \mathbf{e}'_1 | \mathbf{e}'_1 \rangle & \langle \mathbf{e}'_1 | \mathbf{e}'_2 \rangle \\ \langle \mathbf{e}'_2 | \mathbf{e}'_1 \rangle & \langle \mathbf{e}'_2 | \mathbf{e}'_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'^T_1 \\ \mathbf{e}'^T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} = \mathbf{S}^T \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{e}^T_1 \\ \mathbf{e}^T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{1}} \mathbf{S} = \mathbf{S}^T\mathbf{S}$$

$$= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}$$

Alternative :
$\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = s^k{}_i \mathbf{e}_k \cdot s^\ell{}_j \mathbf{e}_\ell = s^k{}_i s^\ell{}_j \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_\ell = s^k{}_i s^\ell{}_j \delta_{k\ell} = s^k{}_i s^k{}_j = (\mathbf{S}^T\mathbf{S})_{ij} = \delta_{ij}$

c) $$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \mathbf{S} \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \mathbf{S}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \mathbf{S}^{-1} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^T = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung : Für die orthonormale Basis ist $\mathbf{S}$ eine unitäre Matrix und $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^T$.

d) $$\begin{pmatrix} x''^1 \\ x''^2 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_f \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{T}_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{S}_f = \mathbf{T}_f^{-1} = \tfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Orthonormalität:

$$\begin{pmatrix} \langle \mathbf{f}_1|\mathbf{f}_1\rangle & \langle \mathbf{f}_1|\mathbf{f}_2\rangle \\ \langle \mathbf{f}_2|\mathbf{f}_1\rangle & \langle \mathbf{f}_2|\mathbf{f}_2\rangle \end{pmatrix} = \mathbf{S}_f^T \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{1}} \mathbf{S}_f = \mathbf{S}_f^T \mathbf{S}_f = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

nicht orthogonal und nicht normiert

e) $\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x''^1 \\ x''^2 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_f \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

2.3 Duale Basis

a) $\mathbf{e}_i'^T \cdot \mathbf{e}_j' = \delta_{ij} \to \mathbf{e}'^i = \mathbf{e}_i'^T$

b) Orthogonalität der dualen Basis $\begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{1} \to \mathbf{S}_f^* \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{1}} \mathbf{S}_f = \mathbf{1} \to \mathbf{S}_f^* \mathbf{S}_f = \mathbf{1}$

$\mathbf{S}_f^* = \mathbf{S}_f^{-1} = \mathbf{T}_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \to \mathbf{f}^1 = 2\mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^2$ und $\mathbf{f}^2 = 2\mathbf{e}^1 - \mathbf{e}^2$

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1'' & x_2'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1'' & x_2'' \end{pmatrix} \mathbf{S}_f^* \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \end{pmatrix}$

Da $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2\}$ eine Orthonormalbasis ist, $\begin{pmatrix} x_1'' & x_2'' \end{pmatrix} \mathbf{S}_f^* = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1'' & x_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \mathbf{S}_f^{*-1}$

$\to \mathbf{T}_f^* = \mathbf{S}_f^{*-1} = \mathbf{S}_f = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

c) $\langle \mathbf{e}'^1|\mathbf{x}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{3}{\sqrt{2}} = x'^1$

$\langle \mathbf{e}'^2|\mathbf{x}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} = x'^2$

$\langle \mathbf{f}^1|\mathbf{x}\rangle = (2 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 4 = x''^1$

$\langle \mathbf{f}^2|\mathbf{x}\rangle = (2 \quad -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 = x''^2$

Alternative : $\langle \mathbf{e}'^i|\mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{e}'^i|x'^j \mathbf{e}_j'\rangle = x'^j \langle \mathbf{e}'^i|\mathbf{e}_j'\rangle = x'^j \delta^i{}_j = x'^i$

$\langle \mathbf{f}^i|\mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{f}^i|x''^j \mathbf{f}_j\rangle = x''^j \langle \mathbf{f}^i|\mathbf{f}_j\rangle = x''^j \delta^i{}_j = x''^i$

Hinweis:

Die **ko**varianten Koordinaten x_i werden mit dem **gleichen** Transformationsmatrix wie die Basistransformation transformiert (d.h. $\mathbf{T}^* = \mathbf{S}$) und sind die Projektion auf den Basisvektor $x_i = \langle \mathbf{e}_i|\mathbf{x}\rangle$.

Die **kontra**varianten Koordinaten x^i werden mit dem **inversen** Transformationsmatrix der Basistransformation transformiert (d.h. $\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}$) und sind die Projektion auf den Basisvektor im dualen Raum $x^i = \langle \mathbf{e}^i|\mathbf{x}\rangle$.

d) $x^i x_i = 1 + 4 = 5$

$x'^i x_i' = 9/2 + 1/2 = 5$

$x_1'' = \langle \mathbf{f}_1|\vec{x}\rangle = \frac{1}{4}(1 \quad 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5/4$

$x_2'' = \langle \mathbf{f}_2|\vec{x}\rangle = \frac{1}{4}(1 \quad -2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -3/4$

$x''^i x_i'' = 4(5/4) + 0(-3/4) = 5$