3. Tutorium **für 25.10.2019**

3.1 Levi-Civita Symbol

Das Levi-Civita Symbol:

$$\varepsilon_{ijk\dots} = \begin{cases} +1 & \text{falls} \quad (i,j,k,\cdots) \text{ eine gerade Permutation von } (1,2,3,\cdots) \text{ ist,} \\ -1 & \text{falls} \quad (i,j,k,\cdots) \text{ eine ungerade Permutation von } (1,2,3,\cdots) \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Gegeben seien 3 Vektoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ in einem kartesischen Koordinatensystem. Berechne $\varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$.
b) Berechne $\varepsilon_{ijk} a_i a_j$ für einen beliebigen Vektor $\mathbf{a}$.
c) Gegeben sei eine 3×3-Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$. Schreibe mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols die Determinante $\det\mathbf{A}$ in Indexschreibweise.

3.2 Orthogonalprojektion

a) Gegeben sei ein Vektor $\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in einem kartesischen Koordinatensystem. Schreibe den zugehörigen Projektor $\mathbf{E_1}$ als eine 3×3 Matrix an.
b) Berechne $(\mathbf{E_1})^3$.
c) Verwende das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren, um die Vektoren $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ zu orthogonalisieren. Die zwei weiteren Vektoren sind durch $\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ definiert. Im Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren werden die orthogonalen Vektoren durch $\mathbf{e}_i = \mathbf{f}_i - \sum_{j<i} \mathbf{E'_j} \mathbf{f}_i$ berechnet, wobei $\mathbf{E'_j}$ der Projektor auf den Vektor $\mathbf{e}_j$ $(j = 1,2,3)$ ist.
d) Berechne die Transformationsmatrix $\mathbf{R}$, wobei

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \mathbf{R}\,,$$

und zeige, dass die Matrix $\mathbf{R}$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

3.3 Spektraltheorem

Betrachte die Differentialgleichung $\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. In einer zweidimensionalen kartesischen Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ werden der Vektor $\mathbf{x}$ und der lineare Operator $\mathbf{A}$ mit $\mathbf{x} = x_i\mathbf{e}_i$ und $\mathbf{A} = |\mathbf{e}_i\rangle\langle\mathbf{e}_i|\mathbf{A}|\mathbf{e}_j\rangle\langle\mathbf{e}_j| = a_{ij}|\mathbf{e}_i\rangle\langle\mathbf{e}_j|$ $\;(a_{ij} = \langle\mathbf{e}_i|\mathbf{A}|\mathbf{e}_j\rangle)$ dargestellt.
a) Berechne die Eigenwerte λ_1, λ_2 $(\lambda_1 > \lambda_2)$ und die normierten Eigenvektoren $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ des Operators $\mathbf{A}$, dessen Matrixdarstellung ist durch

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Überprüfe die Orthogonalität der Eigenvektoren.
b) Schreibe die Transformationsmatrix $\mathbf{S}$ an, wobei

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \mathbf{S}$$

und berechne die Matrixelemente a'_{ij} des Operators $\mathbf{A}$ in der Eigenbasis $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ (d.h. $\mathbf{A} = a'_{ij}|\mathbf{e}'_i\rangle\langle\mathbf{e}'_j|$).
c) Schreibe die Differentialgleichung für den Koordinaten x'_1, x'_2 an (d.h. die Gleichung $\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ soll in der Eigenbasis $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ dargestellt werden) und finde die Lösung $x'_1(t)$, $x'_2(t)$ mit den Anfangsbedingungen, $x'_1(t=0) = 0$ und $x'_2(t=0) = 1$.
d) Berechne $x_1(t)$ und $x_2(t)$ in der kartesischen Basis und überprüfe, dass gilt

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t=0)\,.$$

Ankreuzbar: 1a-c, 2ab, 2c, 2d, 3ab, 3cd