3. Tutorium - Lösungen **25.10.2019**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel anzuschauen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

3.1 Levi-Civita Symbol

a) $\varepsilon_{ijk}a_ib_jc_k = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})_k c_k = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$ $(= (\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a} = (\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b})$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-1\\2\end{pmatrix} \to (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = 3$$

Alternative:

$$\varepsilon_{ijk}a_ib_jc_k = \begin{vmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 0 & -2\\-1 & 2 & 1\\1 & 1 & -1\end{vmatrix} = -2+2+0+4-0-1 = 3$$

b) $$\underbrace{\varepsilon_{ijk}a_ia_j}_{\text{Umbenennung der Indizes } i\leftrightarrow j} = \varepsilon_{jik}\underbrace{a_ja_i}_{a_ja_i=a_ia_j} = \underbrace{\varepsilon_{jik}}_{\varepsilon_{jik}=-\varepsilon_{ijk}} a_ia_j = -\varepsilon_{ijk}a_ia_j \to \varepsilon_{ijk}a_ia_j = 0$$

Alternative Lösung : $\varepsilon_{ijk}a_ia_j = (\mathbf{a}\times\mathbf{a})_k = 0$

c) $\det\mathbf{A} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$
$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{21}(a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})$
$= \varepsilon_{1jk}a_{11}a_{j2}a_{k3} + \varepsilon_{2jk}a_{21}a_{j2}a_{k3} + \varepsilon_{3jk}a_{31}a_{j2}a_{k3} = \varepsilon_{ijk}a_{i1}a_{j2}a_{k3}$ $(= (\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)\cdot\mathbf{a}_3)$

3.2 Orthogonalprojektion

a) $$\mathbf{E_1} = \frac{\mathbf{f}_1\otimes\mathbf{f}_1^T}{\mathbf{f}_1^T\cdot\mathbf{f}_1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

b) $$\mathbf{E_1}^2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} = \mathbf{E}_1$$

$\mathbf{E_1}^3 = \mathbf{E_1}^2\mathbf{E_1} = \mathbf{E_1}\mathbf{E_1} = \mathbf{E_1}$ (Anmerkung : $\mathbf{E_1}^n = \mathbf{E_1}$)

c) $$\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \to \mathbf{E}'_1 = \mathbf{E}_1$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{f}_2 - \mathbf{E}'_1\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\to \mathbf{E}'_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_3 - \mathbf{E}'_1\mathbf{f}_3 - \mathbf{E}'_2\mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

d) Die dualen Basisvektoren des orthogonalen Systems : $\mathbf{e}^i = \langle \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_i \rangle^{-1} \mathbf{e}_1^T$
$\rightarrow \mathbf{e}^1 = 3^{-1}\mathbf{e}_1^T$, $\mathbf{e}^2 = 2^{-1}\mathbf{e}_2^T$, $\mathbf{e}^3 = 6\mathbf{e}_3^T$,

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \\ \mathbf{e}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \\ \mathbf{e}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/3 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Anmerkung : Die QR-Zerlegung, $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, (die Zerlegung einer Matrix $\mathbf{A}$ mit einer orthogonalen Matrix $\mathbf{Q}$ und einer oberen Dreiecksmatrix $\mathbf{R}$) ist eine Methode, um die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ zu rechnen. In $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^{-1}$ sind $\mathbf{R}^{-1}$ und $\mathbf{Q}^{-1}$ relativ leicht zu rechnen.

3.3 Spektraltheorem

a) Säkulardeterminante :

$$\det(a_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = \det \begin{vmatrix} 1-\lambda & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 4 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -2$$

Eigenvektoren : $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \sqrt{3}b \\ \sqrt{3}a - b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} a + \sqrt{3}b \\ \sqrt{3}a - b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 2ab + \sqrt{3}b^2 - \sqrt{3}a^2 = (\sqrt{3}b - a)(b + \sqrt{3}a) = 0 \rightarrow b = -\sqrt{3}a, (1/\sqrt{3})a$

Wenn $b = -\sqrt{3}a$, $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a \\ 2\sqrt{3}a \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Da der Eigenwert $\lambda_2 = -2$ und der Eigenvektor $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Wenn $a = \sqrt{3}b$, $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}b \\ 2b \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Da der Eigenwert $\lambda_1 = 2$ und der Eigenvektor $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \rightarrow \langle \mathbf{e}'_1 | \mathbf{e}'_2 \rangle = 0$ (orthogonal)

b) $\mathbf{S} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}'_j (\mathbf{S}^{-1})_{ji} = \mathbf{e}'_j (\mathbf{T})_{ji} = \mathbf{e}'_j t_{ji} \rightarrow \mathbf{A} = a_{ij} |\mathbf{e}_i\rangle\langle\mathbf{e}_j| = a_{ij} t_{ki} |\mathbf{e}'_k\rangle\langle\mathbf{e}'_\ell| t_{\ell j} = t_{ki} a_{ij} t_{\ell j} |\mathbf{e}'_k\rangle\langle\mathbf{e}'_\ell| \equiv a'_{k\ell} |\mathbf{e}'_k\rangle\langle\mathbf{e}'_\ell|$

$(a'_{k\ell}) = (t_{ki} a_{ij} t_{\ell j}) = \mathbf{TAT}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Bemerkung : Spektraltheorem $\mathbf{A} = \lambda_i \mathbf{E}'_i$ mit den Projektoren $\mathbf{E}'_i = |\mathbf{e}'_i\rangle\langle\mathbf{e}'_i|$ auf den Vektor $\mathbf{e}'_i$.

c) $\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{Ax} \rightarrow \frac{d}{dt} x'_i(t) |\mathbf{e}'_i\rangle = a'_{ij} |\mathbf{e}'_i\rangle\langle\mathbf{e}'_j| x'_k(t) |\mathbf{e}'_k\rangle = a'_{ij} |\mathbf{e}'_i\rangle \delta_{jk} x'_k(t) = a'_{ij} x'_j(t) |\mathbf{e}'_i\rangle$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der Eigenvektoren $\frac{d}{dt} x'_i(t) = a'_{ij} x'_j(t)$

$\rightarrow \frac{d}{dt} x'_1(t) = 2x'_1(t)$ und $\frac{d}{dt} x'_2(t) = -2x'_2(t) \rightarrow x'_1(t) = x'_1(0)e^{2t}$ und $x'_2(t) = x'_2(0)e^{-2t}$

Anfangsbedingungen $x'_1(0) = 0$ und $x'_2(0) = 1 \rightarrow x'_1(t) = 0$ und $x'_2(t) = e^{-2t}$

d) $x'_i = t_{ij} x_j \rightarrow x_j = (\mathbf{T}^{-1})_{ji} x'_i = (\mathbf{S})_{ji} x'_i = s_{ji} x'_i$

$x_1(t) = s_{11} x'_1(t) + s_{12} x'_2(t) = \frac{1}{2} e^{-2t}$, $x_2(t) = s_{21} x'_1(t) + s_{22} x'_2(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2} e^{-2t}$

$e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) = \sum_{i,k=1}^{2} e^{\lambda_i t} |\mathbf{e}'_i\rangle\langle\mathbf{e}'_i| x'_k(0) |\mathbf{e}'_k\rangle = \sum_{i,k=1}^{2} x'_k(0) e^{\lambda_i t} |\mathbf{e}'_i\rangle \delta_{ik} = \sum_i^2 x'_i(0) e^{\lambda_i t} |\mathbf{e}'_i\rangle = \sum_{i,j}^2 x'_i(0) e^{\lambda_i t} s_{ji} |\mathbf{e}_j\rangle =$
$\sum_{j=1}^{2} e^{\lambda_2 t} s_{j2} |\mathbf{e}_j\rangle = \frac{1}{2} e^{-2t} |\mathbf{e}_1\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-2t} |\mathbf{e}_2\rangle$