**4. Tutorium** **für 8.11.2019**

## 4.1 Levi-Civita Symbol (II)

a) Zeige $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$ durch repräsentatives Einsetzen von Zahlen in die Indizes (Einsteinsche Summenkonvention beachten).
b) Zeige in Indexschreibweise, dass für Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ in einer dreidimensionalen, orthonormalen Basis gilt $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$.

## 4.2 Metrischer Tensor

Gegeben seien drei Vektoren $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$, die in einer orthonormalen Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ durch

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

definiert werden.
a) Zeige, dass $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ eine Basis des Vektorraums ist.
b) Überprüfe die Orthonormalität der Basis $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ und berechne die Basisvektoren $\{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2, \mathbf{f}^3\}$ des dualen Raums.
c) Ein Vektor $\mathbf{x}$ wird in der orthonormalen Basis mit $\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i$ und in der neuen Basis mit $\mathbf{x} = x'^i\mathbf{f}_i$ dargestellt. Berechne die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ zwischen den Koordinaten, d.h.

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} .$$

d) In den dualen Räumen wird der Vektor mit $\mathbf{x} = x_i\mathbf{e}^i = x'_i\mathbf{f}^i$ dargestellt. Berechne die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ zwischen den Koordinaten, d.h.

$$\begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \mathbf{T}^* .$$

e) Bestimme die Transformationsmatrix $\mathbf{Q}$ zwischen den Koordinaten $x'^i$ und $x'_i$, wobei

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}$$

und zeige, dass $\mathbf{Q}$ der metrische Tensor $\mathbf{g}' = (g'_{ij})$ für das Basis $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ ist.
f) Zeige, dass gilt $\sqrt{\det(\mathbf{g}')} = V$ wobei $V$ das Volumen des von $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ gebildeten Parallelepipedes ist.

## 4.3 Differentialoperatoren

Ein 3-dimensionaler Vektor sei mit $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$ in der orthonormalen Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ dargestellt.
a) Berechne für $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ den Ausdruck $\partial_i(x_k x_k) + \partial_k(x_i x_k)$.
b) Berechne $\partial_i x_i \sqrt{x_k x_k}$.
c) Berechne $\mathrm{rot}(\mathbf{p} \times \mathbf{x})$, wobei $\mathbf{p} = p_i \mathbf{e}_i$ ein konstanter Vektor ist.

## 4.4 Lokale Transformation

Berechne das Kurvenintegral $\int_C \mathbf{b} \cdot \mathbf{dx}$ für $\mathbf{b}(x, y) = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ und $C = \{(x(u, v), y(u, v))|u = 1, 0 \leq v \leq \pi/2\}$ mit den folgenden Schritten. Die Transformation zwischen kartesischen $(x, y)$ und elliptischen Koordinaten $(u, v)$ ist definiert, durch

$$x^1 = x(u, v) = \cosh u \, \cos v, \;\; x^2 = y(u, v) = \sinh u \, \sin v \qquad (0 \leq u < \infty \, , \, 0 \leq v \leq 2\pi) \, .$$

a) Die infinitesimale Änderung $\mathbf{dx} = dx^i \mathbf{e}_i$ wird mit dem neuen Koordinatensystem dargestellt, d.h. $\mathbf{dx} = dx'^i \mathbf{e}'_i$ mit $dx'^1 = du$, $dx'^2 = dv$ und der entsprechenden Basis $\mathbf{e}'_i$. Berechne die Transformationsmatrix $\mathbf{S}$ der Basisvektoren, wobei $\mathbf{e}'_i = s^j{}_i \mathbf{e}_j$.
b) Der Vektor $\mathbf{b}$ wird im dualen Raum mit $\mathbf{b} = b'_i(u, v)\mathbf{e}'^i$ dargestellt. Berechne den Koordinaten $b'_i(u, v)$.
c) Schreibe das Skalarprodukt $\mathbf{b} \cdot \mathbf{dx}$ im neuen Koordinatensystem an und berechne das Kurvenintegral $\int_C \mathbf{b} \cdot \mathbf{dx}$.

---

Ankreuzbar: 1ab, 2ab, 2cd, 2ef, 3a-c, 4a-c