4. Tutorium - Lösungen **16.11.2018**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel anzuschauen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

4.1 Levi-Civita Symbol (II)

a) i) Wenn $i = j$: $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = 0$. $\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} = \delta_{il}\delta_{im} - \delta_{im}\delta_{il}$ (ohne Summe über i)
Wenn $l = m = i$, $\delta_{il}\delta_{im} - \delta_{im}\delta_{il} = 1 - 1 = 0$ und sonst, $\delta_{il}\delta_{im} - \delta_{im}\delta_{il} = 0 - 0 = 0$
ii) Wenn $i \neq j$: In der Summe über k trägt $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}$ nur 1 Term ($k \neq i$ und $k \neq j$) bei.
ii-a) Wenn $l = i$ und $m = j$ (z.B. $i = l = 1$, $j = m = 2$, $k = 3$): $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kij} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 1$
$\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} = \delta_{ii}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{ji} = 1$ (ohne Einsteinsche Summenkonvention)
ii-b) Wenn $l = j$ und $m = i$ (z.B. $i = m = 1$, $j = l = 2$, $k = 3$): $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = -1$
$\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} = \delta_{ij}\delta_{ji} - \delta_{ii}\delta_{jj} = -1$ (ohne Einsteinsche Summenkonvention)
ii-c) Sonst ($l = m$ und/oder $l = k$ und/oder $m = k$): $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = 0$ und $\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} = 0$
Alternative Lösung:
Mit einer orthonormalen Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, $\varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j$ und $\varepsilon_{n\ell m}\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_\ell \times \mathbf{e}_m$
$\varepsilon_{ijk} = (\varepsilon_{ijk'}\mathbf{e}_{k'}) \cdot \mathbf{e}_k = (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k = \det\begin{pmatrix} \mathbf{e}_i & \mathbf{e}_j & \mathbf{e}_k \end{pmatrix}$
Auf die gleiche Weise $\varepsilon_{n\ell m} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{e}_n & \mathbf{e}_\ell & \mathbf{e}_m \end{pmatrix}$
Basistransformation $\begin{pmatrix} \mathbf{e}_i & \mathbf{e}_j & \mathbf{e}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_n & \mathbf{e}_\ell & \mathbf{e}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{ni} & \delta_{nj} & \delta_{nk} \\ \delta_{\ell i} & \delta_{\ell j} & \delta_{\ell k} \\ \delta_{mi} & \delta_{mj} & \delta_{mk} \end{pmatrix}$
$\rightarrow \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{n\ell m} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{e}_i & \mathbf{e}_j & \mathbf{e}_k \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} \mathbf{e}_n & \mathbf{e}_\ell & \mathbf{e}_m \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \delta_{ni} & \delta_{nj} & \delta_{nk} \\ \delta_{\ell i} & \delta_{\ell j} & \delta_{\ell k} \\ \delta_{mi} & \delta_{mj} & \delta_{mk} \end{pmatrix} \underbrace{\left[\det\begin{pmatrix} \mathbf{e}_n & \mathbf{e}_\ell & \mathbf{e}_m \end{pmatrix}\right]^2}_{=(\varepsilon_{n\ell m})^2=1}$
$= \delta_{ni}(\delta_{\ell j}\delta_{mk} - \delta_{mj}\delta_{\ell k}) + \delta_{nj}(\delta_{\ell k}\delta_{mi} - \delta_{mk}\delta_{\ell i}) + \delta_{nk}(\delta_{\ell i}\delta_{mj} - \delta_{mi}\delta_{\ell j})$
$\rightarrow \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{k\ell m} = \delta_{ki}(\delta_{\ell j}\delta_{mk} - \delta_{mj}\delta_{\ell k}) + \delta_{kj}(\delta_{\ell k}\delta_{mi} - \delta_{mk}\delta_{\ell i}) + \delta_{kk}(\delta_{\ell i}\delta_{mj} - \delta_{mi}\delta_{\ell j})$
$= \delta_{\ell j}\delta_{mi} - \delta_{mj}\delta_{\ell i} + \delta_{\ell j}\delta_{mi} - \delta_{mj}\delta_{\ell i} + 3(\delta_{\ell i}\delta_{mj} - \delta_{mi}\delta_{\ell j}) = \delta_{\ell i}\delta_{mj} - \delta_{mi}\delta_{\ell j}$
Bemerkung : Für die Matrizen **A** und **B**
$\det(\mathbf{AB}) = \varepsilon_{ijk}a_{1\ell}b_{\ell i}a_{2m}b_{mj}a_{3n}b_{nk} = a_{1\ell}a_{2m}a_{3n}(\varepsilon_{ijk}b_{\ell i}b_{mj}b_{nk}) = a_{1\ell}a_{2m}a_{3n}\varepsilon_{\ell mn}\det\mathbf{B} = \det\mathbf{A}\det\mathbf{B}$
b)
$\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2 + |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) + \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = a_i b_i a_j b_j + \varepsilon_{ijk} a_j b_k \varepsilon_{ilm} a_l b_m$
$= a_i b_i a_j b_j + (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})\, a_j b_k a_l b_m = a_i b_i a_j b_j + a_j a_j b_k b_k - a_j b_k a_k b_j = a_j a_j b_k b_k = (\vec{a} \cdot \vec{a})\left(\vec{b} \cdot \vec{b}\right) = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2.$

4.2 Metrischer Tensor

a) $\det\begin{pmatrix}\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3\end{pmatrix} = \det\left(\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\right)$

$= \underbrace{\det\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\end{pmatrix}}_{=1}\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix} = -1$ (linear unabhängig)

b) $\mathbf{f}_1\cdot\mathbf{f}_1 = 3 \to$ nicht normiert

$\mathbf{f}_1\cdot\mathbf{f}_2 = 2 \to$ nicht orthogonal

duale Basis: Da $\mathbf{f}^1$ ist orthogonal zu $\mathbf{f}_2$ und $\mathbf{f_3}$, $\mathbf{f}^1 = c_1\mathbf{f}_2\times\mathbf{f}_3 = c_1\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Normierung $\mathbf{f}^1\cdot\mathbf{f}_1 = 1 \to c_1 = 1/(\mathbf{f}_1\cdot(\mathbf{f}_2\times\mathbf{f}_3)) = -1$ und $\mathbf{f}^1 = \begin{pmatrix}1 & -1 & -1\end{pmatrix}$.

Auf die gleiche Weise, $\mathbf{f}^2 = c_2\mathbf{f}_3\times\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ und $\mathbf{f}^3 = c_3\mathbf{f}_1\times\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

Hinweis: $\mathbf{f}_1\cdot(\mathbf{f}_2\times\mathbf{f}_3) = \mathbf{f}_2\cdot(\mathbf{f}_3\times\mathbf{f}_1) = \mathbf{f}_3\cdot(\mathbf{f}_1\times\mathbf{f}_2) = \varepsilon_{ijk}f^i{}_1 f^j{}_2 f^k{}_3 \to c_1 = c_2 = c_3 = -1$

Mit $V = \mathbf{f}_1\cdot(\mathbf{f}_2\times\mathbf{f}_3)$ sind die dualen Basisvektoren $\mathbf{f}^i = V^{-1}\varepsilon_{ijk}\mathbf{f}_j\times\mathbf{f}_k$.

c) $x'^i = \mathbf{f}^i\cdot\mathbf{x} = f^{*i}{}_j\mathbf{e}^j\cdot\mathbf{x} = f^{*i}{}_j x^j$

$\to (t^i{}_j) = (f^{*i}{}_j) = \begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

Alternative Lösung: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\\ x^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'^1\\ x'^2\\ x'^3\end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix}x'^1\\ x'^2\\ x'^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\\ x^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\\ x^3\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\\ x^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{f}^1\\ \mathbf{f}^2\\ \mathbf{f}^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\\ x^3\end{pmatrix}$

$\to \mathbf{T} = \begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

d) $x'_i = \mathbf{f}_i\cdot\mathbf{x} = f^j{}_i\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{x} = f^j{}_i x_j \to \mathbf{T}^* = (t^{*j}_i) = (f^j{}_i) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1}$

e) $\begin{pmatrix}x'_1\\ x'_2\\ x'_3\end{pmatrix} = (\mathbf{T}^*)^T\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}x'^1\\ x'^2\\ x'^3\end{pmatrix} = \mathbf{T}\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\\ x^3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}x^1\\ x^2\\ x^3\end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1}\begin{pmatrix}x'^1\\ x'^2\\ x'^3\end{pmatrix} = \mathbf{T}^*\begin{pmatrix}x'^1\\ x'^2\\ x'^3\end{pmatrix}$

Da gilt $x^i = x_i$ im orthonormalen System, $\begin{pmatrix}x'_1\\ x'_2\\ x'_3\end{pmatrix} = (\mathbf{T}^*)^T\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = (\mathbf{T}^*)^T\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\\ x^3\end{pmatrix} = (\mathbf{T}^*)^T\mathbf{T}^*\begin{pmatrix}x'^1\\ x'^2\\ x'^3\end{pmatrix}$

$\to \mathbf{Q} = (\mathbf{T}^{*T})\mathbf{T}^* = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$

$\mathbf{g}' = (\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{f}_j) = \begin{pmatrix}\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix} = \mathbf{Q}$

Alternative Lösung : $\mathbf{x} = x'^i\mathbf{f}_i \to x'_i = \mathbf{f}_i\cdot\mathbf{x} = x'^j\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{f}_j \to q_{ij} = \mathbf{f}_i\cdot\mathbf{f}_j = g'_{ij}$

f) $V = |(\mathbf{f}_1\times\mathbf{f}_2)\cdot\mathbf{f}_3| = |\det(\mathbf{T}^*)|$

$\mathbf{g}' = (\mathbf{T}^*)^T\mathbf{T}^* \to \det(\mathbf{g}') = \det((\mathbf{T}^*)^T)\det(\mathbf{T}^*) = [\det(\mathbf{T}^*)]^2 = V^2 \to V = \sqrt{\det(\mathbf{g}')}$

Alternative Lösung : $\sqrt{\det(\mathbf{g}')} = \sqrt{12+4+4-8-8-3} = 1$ und $V = |(\mathbf{f}_1\times\mathbf{f}_2)\cdot\mathbf{f}_3| = 1$.

4.3 Differentialoperatoren

a) $(\partial_i x_k x_k) + \partial_k(x_i x_k) = x_k\delta_{ik} + \delta_{ik}x_k + \delta_{ik}x_k + x_i\delta_{kk} = x_i + x_i + x_i + 3x_i = 6x_i$
b) $\sqrt{x_k x_k} = \sqrt{x_1x_1 + x_2x_2 + \cdots} \neq \sqrt{x_1x_1} + \sqrt{x_2x_2} + \cdots$
$\to \partial_i\sqrt{x_k x_k} = \frac{1}{2\sqrt{x_j x_j}}\partial_i(x_k x_k) \neq (\partial_i\sqrt{x_k})\sqrt{x_k} + \sqrt{x_k}(\partial_i\sqrt{x_k})$
$\partial_i(x_i\sqrt{x_k x_k}) = (\partial_i x_i)\sqrt{x_k x_k} + x_i(\partial_i\sqrt{x_k x_k}) = \delta_{ii}\sqrt{x_k x_k} + x_i\frac{1}{2\sqrt{x_j x_j}}\partial_i(x_k x_k)$
$= 3\sqrt{x_k x_k} + x_i\frac{1}{\sqrt{x_j x_j}}x_i = 4|\mathbf{x}|$
c) $(\mathrm{rot}(\mathbf{p}\times\mathbf{x}))_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j(\mathbf{p}\times\mathbf{x})_k = \varepsilon_{ijk}\partial_j(p_\ell\mathbf{e}_\ell \times x_m\mathbf{e}_m)_k = \varepsilon_{ijk}\partial_j(p_\ell x_m\varepsilon_{\ell mn}\mathbf{e}_n)_k = \varepsilon_{ijk}\partial_j\varepsilon_{\ell mk}p_\ell x_m$
$= \underbrace{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{\ell mk}}_{\delta_{i\ell}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{j\ell}}\delta_{jm}p_\ell = (\delta_{i\ell}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{j\ell})p_\ell = (3\delta_{i\ell} - \delta_{i\ell})p_\ell = 2\delta_{i\ell}p_\ell = 2p_i \to \mathrm{rot}(\mathbf{p}\times\mathbf{x}) = 2\mathbf{p}$

4.4 Lokale Transformation

a) $\mathbf{dx} = dx^i\mathbf{e}_i = (\frac{\partial}{\partial x'^j}x^i)dx'^j\mathbf{e}_i \equiv dx'^j\mathbf{e}'_j. \to \mathbf{e}'_j = (\frac{\partial}{\partial x'^j}x^i)\mathbf{e}_i$
parabolische Zylinderkoordinaten : $x'^1 = u$, $x'^2 = v$
Transformation zwischen kartesischen Koordinaten und elliptischen Koordinaten
$x^1 = \cosh u\cos v$ und $x^2 = \sinh u \sin v$.
$\mathbf{e}'_1 = (\frac{\partial}{\partial x'^1}x^i)\mathbf{e}_i = \sinh u\cos v\,\mathbf{e}_1 + \cosh u\sin v\,\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}'_2 = (\frac{\partial}{\partial x'^2}x^i)\mathbf{e}_i = -\cosh u\sin v\,\mathbf{e}_1 + \sinh u\cos v\,\mathbf{e}_2$
$\begin{pmatrix}\mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sinh u\cos v & -\cosh u\sin v\\ \cosh u\sin v & \sinh u\cos v\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{pmatrix}\mathbf{S}$ mit $s^i{}_j = \frac{\partial}{\partial x'^j}x^i$
Anmerkung : Im Skriptum (Sec.2.13) sind die Basisvektoren als Einheitsvektoren definiert (d.h. $\mathbf{x} = \sum_i dx^i h_i\hat{\mathbf{e}}'_i$ mit $h_i = |\mathbf{e}'_i|$ und $\hat{\mathbf{e}}'_i = \mathbf{e}'_i/|\mathbf{e}'_i|$.) Aber in diesem Beispiel sind die Basisvektoren als allgemeine nicht-orthogonale Vektoren behandelt (wie in, z.B. Sec.2.7 im Skriptum).
b) $b'_1 = \mathbf{b}\cdot\mathbf{e}'_1 = x\sinh u\cos v + y\cosh u\sin v = \sinh u\cosh u\cos^2 v + \cosh u\sinh u\sin^2 v = \sinh u\cosh u$
$b'_2 = \mathbf{b}\cdot\mathbf{e}'_2 = -x\cosh u\sin v + y\sinh u\cos v = -\cosh^2 u\sin v\cos v + \sinh^2 u\sin v\cos v = -\sin v\cos v$
Alternative Lösung :
$\mathbf{b} = b^i\mathbf{e}_i = b'^i\mathbf{e}'_i$ (mit $b^1 = x$ und $b^2 = y$)
$\begin{pmatrix} b'^1\\ b'^2\end{pmatrix} = \mathbf{S}^{-1}\begin{pmatrix} b^1\\ b^2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b'_1\\ b'_2\end{pmatrix} = \mathbf{g}'\begin{pmatrix} b'^1\\ b'^2\end{pmatrix} = \mathbf{g}'\mathbf{S}^{-1}\begin{pmatrix} b^1\\ b^2\end{pmatrix}$
metrischer Tensor $\mathbf{g}' = \begin{pmatrix}\mathbf{e}'_1\\ \mathbf{e}'_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2\end{pmatrix} = \mathbf{S}^T\mathbf{S}$
$\to \begin{pmatrix} b'_1\\ b'_2\end{pmatrix} = \mathbf{S}^T\mathbf{S}\mathbf{S}^{-1}\begin{pmatrix} b^1\\ b^2\end{pmatrix} = \mathbf{S}^T\begin{pmatrix} b^1\\ b^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sinh u\cos v & \cosh u\sin v\\ -\cosh u\sin v & \sinh u\cos v\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b^1\\ b^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cosh u\sinh u\\ -\sin v\cos v\end{pmatrix}$
c) $\mathbf{b}\cdot\mathbf{dx} = b'_i\mathbf{e}'^i\cdot dx'^j\mathbf{e}'_j = b'_i dx'^j\delta^i_j = b'_i dx'^i = \sinh u\cosh u du - \sin v\cos v dv$
$\int_C \mathbf{b}\cdot\mathbf{dx} = \int_{u=1}\sinh u\cosh u du - \int_0^{\pi/2}\sin v\cos v dv = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2v dv = -\frac{1}{2}$