5. Tutorium **für 22.11.2019**

5.1 Differentialoperatoren (II)

Eine infinitesimale Änderung eines 3-dimensionalen Vektors sei mit $\mathbf{dx} = dx^i \mathbf{f}_i$ in der Basis $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ dargestellt. Die Basisvektoren seien ortsabhängig, nicht-orthogonal und nicht-normiert.
a) Berechne $\nabla \times (\nabla x^i)$.
b) Zeige $\nabla x^i = \mathbf{f}^i$.
c) Berechne $\nabla \cdot \left(\frac{1}{V}\mathbf{f}_i\right)$ wobei $V = \sqrt{\det(\mathbf{g})}$ und $\mathbf{g}$ der metrische Tensor des Koordinatensystems ist.
(Hinweis : $\varepsilon_{ijk}\mathbf{f}_i \propto \mathbf{f}_j \times \mathbf{f}_k$ und $\nabla(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})$)
d) Zeige, dass für ein ortsabhängiges Vektorfeld $\mathbf{v} = v^i(\mathbf{x})\mathbf{f}_i$ gilt

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{V}\partial_i (V v^i)$$

5.2 Lokale Transformation (II)

a) Berechne, für die Kugelkoordinaten $(x'^1, x'^2, x'^3) = (r, \theta, \phi)$, die Transformationsmatrix (Jacob-Matrix) $\mathbf{S}$ für eine lokale Transformation $dx^i \mathbf{e}_i = dx'^i \mathbf{e}'_i$ zwischen den kartesischen Basisvektoren $\mathbf{e}_i$ und den Basisvektoren $\mathbf{e}'_i$ der Kugelkoordinaten, wobei

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \mathbf{S}\,.$$

Die Transformation zwischen den kartesischen Koordinaten (x^1, x^2, x^3) und den Kugelkoordinaten ist durch $(x^1, x^2, x^3) = (r \sin\theta \cos\phi,\, r \sin\theta \sin\phi,\, r\cos\theta)$ definiert.
b) Zeige, dass

$$\partial_r = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z)\,, \quad \partial_\phi = x\partial_y - y\partial_x\,.$$

c) Berechne die metrischen Tensoren $\mathbf{g}' = (g'_{ij})$ und $\mathbf{g}^{*\prime} = (g'^{ij})$ der Kugelkoordinaten.
d) Berechne für das Vektorfeld $\mathbf{w} = \sin\phi \mathbf{e}'^2 + \sin\theta \mathbf{e}'^3$ und die Oberfläche der Halbkugel $F = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 9, z > 0\}$ das Oberflächenintegral

$$\int_F (\nabla \times \mathbf{w}) \cdot d\mathbf{F}\,.$$

5.3 Tensoren

Die Komponenten eines kontravarianten Tensors zweiter Stufe A bezüglich der kartesischen Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ lauten

$$(a^{ij}) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} .$$

a) Wie lauten die Komponenten a_{ij} bezüglich der dualen Basis zur kartesischen Basis?
b) Wie lauten die Komponenten a'^{ij} des Tensors A bezüglich der nicht-orthogonalen Basis $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ wobei die Basisvektoren durch

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

definiert sind?
c) Berechne die Basisvektoren $\mathbf{f}^i$ im dualen Raum.
d) Berechne die Elemente der metrischen Tensoren, g'_{ij} und g'^{ij} für die nicht-orthogonalen Basis.
e) Berechne die Komponenten a'_{ij} des kovarianten Tensors und ${a'^i}_j$ in der gemischten Darstellung.
f) Zeige, dass gilt $a'^{ij} a'_{ji} = a^{ij} a_{ji}$.

Ankreuzbar: 1a-d, 2ab, 2cd, 3ab, 3cd, 3ef