1. Tutorium

1 Indexschreibweise

---

a) Gegeben seien die Matrizen $\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{C} = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Berechne unter Beachtung der Einsteinschen Summenkonvention $a_{ij}b_{jk}$.
b) Berechne mit denselben Matrizen $a_{ij}c_{kj}$.
c) Berechne mit denselben Matrizen $a_{ij}b_{ki}c_{kj}$.
d) Schreibe in Indexschreibweise $\mathbf{ABC}$ (für allgemeine Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$).
e) Schreibe in Indexschreibweise $\mathbf{C}^T\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ (für allgemeine Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$).

---

a) Unter Berücksichtigung der Einsteinschen Summenkonvention wissen wir:

$$a_{ij}b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

Wie berechnet man nun diese Summe? In Matrixschreibweise gedacht, ist das Ergebnis der Summe für ein gewisses i und k der Eintrag in der i-ten Zeile und k-ten Spalte der resultierenden Matrix. Für die Berechnung dieses Eintrags hält man nun in der ersten Matrix die Zeile, in der zweiten die Spalte fest, und summiert jeweils die Produkte der Elemente, bei denen der Spaltenindex der ersten Matrix und der Zeilenindex der zweiten Matrix gleich sind. Um beispielsweise das Element $1,1$ zu berechnen, summieren wir in zwei Dimensionen die Terme $a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} + b_{21}$. Dies entspricht genau dem jeweiligen Element des Matrix-Matrix-Produktes der beiden Matrizen. Mit diesem Wissen können wir also schreiben:

$$a_{ij}b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} = (\mathbf{AB})_{ik} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\right]_{ik} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{ik}$$

b) Dieses Beispiel funktioniert analog zum ersten Beispiel. Allerdings muss man hier beachten, dass in der zweiten Matrix anstelle der Spalte die Zeile festgehalten wird. In Matrixschreibweise entspricht das einer Transposition der Matrix. Das heißt:

$$a_{ij}c_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{kj} = (\mathbf{AC}^T)_{ik} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right]_{ik} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}_{ik}$$

c) Mit denselben Überlegungen wie in den ersten beiden Teilbeispielen gehen wir auch hier vor. Dies führt uns aber zu einer neuen Situation: Bisher hatten wir zwei freie Indizes, weswegen unser Ergebnis eine Matrix war. Diesmal ist aber kein freier Index vorhanden, das heißt, wenn wir alle Matrizenmultiplikationen durchgeführt haben, so wird - gemäß der Einsteinschen Summenkonvention - immer noch über die Elemente mit gleichem Index summiert, das heißt: die Spur gebildet. Somit gilt:

$$a_{ij}b_{ki}c_{kj} = (\mathbf{A}^T\mathbf{B}^T\mathbf{C})_{ii} = tr\left[\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right] = 0$$

Hier bemerken wir bereits ein Muster: Verfügt unser gesuchtes Objekt über zwei freie Indizes, so ist das Ergebnis eine Matrix. Bei einem freien Index wäre das Ergebnis ein Vektor, und ohne freien Index ein Skalar.

d) Mit dem Wissen aus den bisherigen Beispielen fällt es uns nun nicht schwer, Matrixmultiplikationen in Indexschreibweise anzuschreiben. Da unser Ergebnis eine Matrix sein soll, benötigen wir zwei freie Indizes. Je zwei Matrizen sollen außerdem über denselben (gebundenen) Index verfügen, über den summiert wird. Es lässt sich also schreiben:

$$(\mathbf{ABC})_{il} = a_{ij}b_{jk}c_{kl}$$

e) Analog verfahren wir in diesem Beispiel. Die Transposition von Matrizen wird durch das Vertauschen der Indizes bewirkt:

$$(\mathbf{C}^T\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T)_{li} = (\mathbf{C}^T)_{lk}(\mathbf{B}^T)_{kj}(\mathbf{A}^T)_{ji} = c_{kl}b_{jk}a_{ij} = a_{ij}b_{jk}c_{kl}$$

Die Rechnung führt also auf das gleiche Ergebnis wie $(\mathbf{ABC})_{ij}$.

2 Skalarprodukt

Gegeben seien die Funktionen ($0 \leq x \leq L$)

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \sqrt{\frac{1}{L}} e^{i\lambda_k x} \quad \text{und} \quad g(x) = \sum_{k=1}^{N} b_k \sqrt{\frac{1}{L}} e^{i\lambda_k x} \quad \text{mit } \lambda_k = \frac{2\pi k}{L}.$$

(x, L : reelle Zahlen, a_k, b_k : komplexe Zahlen, $\bar{c}$: konjugiert komplexe Zahl zu c)
a) Zeige, dass die Basisfunktionen $\{(1/L)^{1/2} e^{i\lambda_1 x}, (1/L)^{1/2} e^{i\lambda_2 x}, ..., (1/L)^{1/2} e^{i\lambda_N x}, \}$ orthonormal sind, d.h.

$$\frac{1}{L} \int_0^L \overline{e^{i\lambda_k x}} e^{i\lambda_\ell x} \, dx = \delta_{k\ell}.$$

(Das Kronecker-Delta : $\delta_{k\ell} = 1$ wenn $k = \ell$, und 0 wenn $k \neq \ell$).

b) Berechne das Skalarprodukt

$$\langle f | g \rangle = \int_0^L \overline{f(x)} g(x) \, dx$$

und zeige $\langle f | g \rangle = \sum_{k=1}^{N} \overline{a_k} \, b_k$.

---

a) Zunächst wollen wir zeigen, dass die gegebenen Basiselemente eine Orthonormalbasis bilden. Dazu betrachten wir das Integral

$$\frac{1}{L} \int_0^L \overline{e^{i\lambda_k x}} e^{i\lambda_\ell x} \, dx = \frac{1}{L} \int_0^L e^{-i\lambda_k x} e^{i\lambda_\ell x} \, dx = \frac{1}{L} \int_0^L e^{i(\lambda_\ell - \lambda_k)x} \, dx$$

und treffen nun eine Fallunterscheidung:

- Für $k = \ell \Rightarrow \lambda_k = \lambda_\ell$:

$$\frac{1}{L} \int_0^L e^{i(\lambda_\ell - \lambda_k)x} \, dx = \frac{1}{L} \int_0^L dx = \frac{L}{L} = 1$$

- Für $k \neq \ell \Rightarrow \lambda_k \neq \lambda_\ell$:

$$\frac{1}{L} \int_0^L e^{i(\lambda_\ell - \lambda_k)x} \, dx = \frac{1}{L} \frac{1}{i(\lambda_\ell - \lambda_k)} \, e^{i(\lambda_\ell - \lambda_k)x} \Big|_0^L = \frac{1}{L} \frac{1}{i(\lambda_\ell - \lambda_k)} \left(e^{2i(\ell - k)\pi} - e^0 \right) = 0$$

Somit ist also gezeigt, dass die Basiselemente orthonormal sind. Ein kleiner Vorausblick: Überlegungen dieser Art sind beispielsweise für Fourier-Analyse von höchster Bedeutung!

b) Das Wissen aus diesem Beispiel wollen wir nun auf das Skalarprodukt zweier Funktionen anwenden. Für das konjugiert Komplexe des Produktes zweier komplexer Zahlen z_1 und z_2 gilt:

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

Somit lautet das Skalarprodukt:

$$\langle f|g\rangle = \int_0^L \left(\sum_{k=1}^N \overline{a_k} \sqrt{\frac{1}{L}} e^{-i\lambda_k x} \right) \left(\sum_{\ell=1}^N b_\ell \sqrt{\frac{1}{L}} e^{i\lambda_\ell x} \right) \, dx$$

Nun lässt sich aber aufgrund der Linearität die Summe mit dem Integral vertauschen, und beim Ausmultiplizieren bleiben nur die Terme mit $k = \ell$ übrig, da aufgrund der oben angestellten Überlegungen alle Ausdrücke mit $k \neq \ell$ gleich 0 sind. Das heißt:

$$\begin{aligned} \langle f|g\rangle &= \int_0^L \left(\sum_{k=1}^N \overline{a_k} \sqrt{\frac{1}{L}} e^{-i\lambda_k x} \right) \left(\sum_{\ell=1}^N b_\ell \sqrt{\frac{1}{L}} e^{i\lambda_\ell x} \right) \, dx \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{\ell=1}^N \overline{a_k}\, b_\ell \, \underbrace{\frac{1}{L} \int_0^L e^{-i\lambda_k x} e^{i\lambda_\ell x} \, dx}_{=\delta_{k\ell}} = \sum_{k=1}^N \overline{a_k}\, b_k \end{aligned}$$

Dies entspricht genau dem zu zeigenden Ergebnis aus der Angabe.

3 Differentialgleichung in Matrix-Vektorform

---

a) Schreibe die gekoppelte lineare Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = 2x - y \qquad \frac{dy}{dt} = -2x + 3y$$

in die Matrix-Vektorform $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{A}\mathbf{r}$ um, wobei $\mathbf{A}$ eine 2×2 Matrix ist und $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^T$.
b) Schreibe die Differentialgleichung aus a) in die Matrix-Vektorform $d\mathbf{R}/dt = \mathbf{B}\mathbf{R}$ um, wobei $\mathbf{B}$ eine 2×2 Matrix ist und $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x - y & 2x + y \end{pmatrix}^T$.
c) Das Polynom $y(x) = a_3 x^2 + a_2 x + a_1$ erfüllt die Differentialgleichung $xy''(x) + (1 - x)y'(x) + \lambda y(x) = 0$ (λ : Konstante). Schreibe die Gleichungen für die Koeffizienten $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}^T$ in die Matrix-Vektorform $\mathbf{C}\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}$ mit der 3×3 Matrix $\mathbf{C}$.

---

a) Das Übersetzen des ersten Systems in die Matrix-Vektorform ist im Grunde eine Frage des Ablesens von Koeffizienten. Unser System soll laut Angabe darstellbar sein als

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}x + A_{12}y \\ A_{21}x + A_{22}y \end{pmatrix}$$

Wenn wir nun zeilenweise die Koeffizienten vergleichen, ergibt sich auf den ersten Blick

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{r}$$

b) Dieses Beispiel funktioniert vollkommen analog, allerdings müssen wir zuerst die alten Koordinaten x, y in die neuen X, Y „übersetzen“. Wir können schreiben:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ 2x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Wir wollen nun x und y abhängig von X und Y darstellen. Dazu invertieren wir die Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{z_1 + z_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{z_2 - \frac{2}{3}z_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Hier sei darauf hingewiesen, dass man sich das Invertieren einer 2×2 Matrix $\mathbf{M}$ mit folgender Formel deutlich erleichtern kann:

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{det(\mathbf{M})} \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{pmatrix}$$

Es gilt somit:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} X + Y \\ -2X + Y \end{pmatrix}$$

Mit diesem Wissen, und unter Berücksichtigung der ursprünglichen Differentialgleichungen können wir schreiben:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{R}}{dt} &= \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x-y \\ 2x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-y+2x-3y \\ 4x-2y-2x+3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x-4y \\ 2x+y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{4}{3}(X+Y)-\frac{4}{3}(-2X+Y) \\ \frac{2}{3}(X+Y)+\frac{1}{3}(-2X+Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4X \\ Y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Nun können wir die Koeffizienten wieder einfach ablesen und es ergibt sich:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{R}$$

Wir sehen nun, dass wir durch diese Wahl der Linearkombination von x und y das Differentialgleichungssystem entkoppelt haben.

c) Um Gleichungen für die Koeffizienten zu erhalten, müssen wir zuerst y' und y'' berechnen und in die Differentialgleichung einsetzen:

$$\begin{aligned}y(x) &= a_3x^2 + a_2x + a_1 \\ y'(x) &= 2a_3x + a_2 \\ y''(x) &= 2a_3 \\ \Rightarrow 2a_3x + 2a_3x - 2a_3x^2 &+ a_2 - a_2x + \lambda a_3x^2 + \lambda a_2x + \lambda a_1 = 0 \\ \Rightarrow (\lambda a_3 - 2a_3)x^2 &+ (4a_3 - a_2 + \lambda a_2)x + a_2 + \lambda a_1 = 0\end{aligned}$$

Nun kann diese Gleichung aber nur für alle x allgemein gelten, wenn die einzelnen Koeffizienten jeweils 0 sind. Das führt zu folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}-a_2 &= \lambda a_1 \\ a_2 - 4a_3 &= \lambda a_2 \\ 2a_3 &= \lambda a_3\end{aligned}$$

Hieraus sind die Koeffizienten der Matrix in der gewünschten Matrix-Vektorform aber wiederum einfach ablesbar. Wir können daher das System anschreiben als:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}$$