2. Tutorium

1 Kronecker-Delta

a) Berechne $x_i y_j \delta_{ji}$ für die Vektoren $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Berechne $a_{ij} a_{kl} \delta_{jl}$ für die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Berechne $\delta_{ii} - \delta_{ij}\delta_{ji}\delta_{kk}$ mit dem Kronecker-Delta in d Dimensionen.

a) In der Einsteinschen Summenkonvention setzt das Kronecker-Delta alle Summanden null, bei denen die Indices nicht übereinstimmen (d.h. $i \neq j$). In anderen Worten, es wandelt einen der Indices um, weswegen sich schreiben lässt:

$$x_i y_j \delta_{ji} = x_i y_i = 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-5) + 1 \cdot 2 = 1$$

Der Ausdruck beschreibt also das innere Produkt (Skalarprodukt) der beiden Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$.
b) Analog dazu ist auch die Herangehensweise in diesem Beispiel. Das Kronecker-Delta δ_{jl} wandelt den Index l in den Index j um (oder umgekehrt - der Summationsindex muss fallen gelassen werden. Welcher Index fallen gelassen wird ist nicht von Bedeutung wenn über beide Indices zu summieren ist). Somit können wir schreiben:

$$a_{ij} a_{kl} \delta_{jl} = a_{ij} a_{kj} = (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)_{ik} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right]_{ik} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{ik}$$

c) Für dieses Beispiel betrachten wir die beiden Terme zunächst getrennt voneinander. Unter Beachtung der Einsteinschen Summenkonvention gilt:

$$\delta_{ii} = \sum_{i=1}^{d} \delta_{ii} = \underbrace{1 + 1 + 1 + ... + 1}_{d\,\text{mal}} = d$$

Im anderen Term wandelt δ_{ji} wieder einen der Indices von δ_{ij} um, und der Ausdruck lässt sich somit folgendermaßen berechnen:

$$\delta_{ij}\delta_{ji}\delta_{kk} = \delta_{ii}\delta_{kk} = \sum_{i=1}^{d} \delta_{ii} \sum_{k=1}^{d} \delta_{kk} = d^2$$
$$\Rightarrow \delta_{ii} - \delta_{ij}\delta_{ji}\delta_{kk} = d - d^2$$

Man beachte in allen drei Teilbeispielen die Konsistenz bezüglich der Indices: Ohne freie Indices ist das Ergebnis ein Skalar, mit einem freien Index ein Vektor, und mit zwei freien Indices eine Matrix.

2 Lineare Unabhängigkeit

a) Gegeben seien Vektoren

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ a^2 \end{pmatrix}.$$

Schreibe die Bedingung von a an, sodass die Menge der Vektoren $\mathcal{P} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ linear unabhängig ist.
b) Zeige, dass die Menge $\mathcal{Q} = \{\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_3 + \mathbf{f}_1\}$ auch linear unabhängig ist (angenommen, dass $\mathcal{P}$ linear unabhängig ist).
c) Gegeben seien Polynome

$$p_1(x) = x^2 - 2x + 2, \quad p_2(x) = 2x^2 + 1, \quad p_3(x) = 3x - 1$$

Die Menge der Polynome $\mathcal{F} = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ spannt einen Vektorraum $\mathcal{V}$ auf. Ist die Menge $\mathcal{F}$ linear abhängig oder unabhängig?

---

a) Wir gehen von dem Fall aus, dass die drei Vektoren linear abhängig sind. Dann lässt sich einer der Vektoren als Linearkombination der anderen darstellen, und somit müsste es Koeffizienten β_1, β_2, β_3 geben, sodass gilt:

$$\beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Betrachten wir die Gleichung zeilenweise, so ergibt sich aus der ersten Zeile sofort, dass $\beta_1 = 0$. Aus der zweiten Zeile folgern wir daher:

$$2\beta_2 + 4\beta_3 = 0 \Rightarrow \beta_2 = -2\beta_3$$

Dies setzen wir in die dritte Zeile ein und erhalten:

$$-2\beta_3 a + \beta_3 a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = 2a \Rightarrow a(a-2) = 0 \Rightarrow a = 0 \vee a = 2$$

Wir haben nun also eine Bedingung für den Parameter a, unter deren Erfüllung die Gleichung eine nichttriviale Lösung besitzt und die Vektoren somit linear abhängig sind. Für alle $a \neq 0, 2$ sind die Vektoren daher unabhängig, weil sie nicht als Linearkombinationen voneinander dargestellt werden können. Um zu diesem Ergebnis zu kommen, können wir auch eine andere Methode verwenden, die sich oft als sehr nützlich und schnell erweist. Die Vektoren sind nämlich genau dann linear unabhängig, wenn die Determinante der

Matrix, die sich durch spaltenweises Einschreiben der Vektoren ergibt, gleich null ist. Wollen wir also die Bedingung an a für lineare Abhängigkeit finden, so muss gelten:

$$\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & a & a^2\end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow 2a^2 - 4a = 0 \Rightarrow a(a-2) = 0 \Rightarrow a = 0 \vee a = 2$$

Wir sehen also, dass wir mit deutlich weniger Aufwand, und vor allem mit einer stark verringerten Wahrscheinlichkeit eines Rechenfehlers auf die selbe Lösung kommen.
b) Nun sollen wir zeigen, dass auch die Menge $\mathcal{Q}$, bestehend aus Linearkombinationen der Vektoren des vorigen Beispiels, linear unabhängig ist, sofern die Vektoren selbst linear unabhängig sind (also gilt: $a \neq 0, 2$). Hierfür berechnen wir zuerst die gegebenen Linearkombinationen der Vektoren:

$$\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix}1\\ 3\\ 1+a\end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix}0\\ 6\\ a+a^2\end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 + \mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix}1\\ 5\\ 1+a^2\end{pmatrix}$$

Diese Vektoren müssen wir nun auf ihre lineare Unabhängigkeit prüfen. Hierfür haben wir wiederum mehrere Möglichkeiten (wie oben beschrieben), die Methode der Wahl ist hier allerdings vermutlich die der Determinante, da sonst ein 3×3 Gleichungssystem gelöst werden muss. Wir setzen also die Determinante 0, um eine Bedingung an a für lineare Abhängigkeit zu erhalten:

$$\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & 6 & 5\\ 1+a & a+a^2 & 1+a^2\end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow 6(1+a^2) + 3(a+a^2) - 6(1+a) - 5(a+a^2) = 0$$

Ordnen wir diese Gleichung nach Potenzen von a, so ergibt sich:

$$4a^2 - 8a = 0 \Rightarrow a(a-2) = 0 \Rightarrow a = 0 \vee a = 2$$

Die Vektoren sind also unter denselben Bedingungen linear abhängig oder unabhängig, wie die, aus denen sie zusammengesetzt sind.
c) Nun wollen wir die lineare Abhängigkeit oder Unabhängigkeit auch für Polynome überprüfen. Sollten sie linear abhängig sein, dann müsste auch für sie (analog zu den Vektoren aus den ersten beiden Teilbeispielen) gelten:

$$\alpha_1(x^2 - 2x + 2) + \alpha_2(2x^2 + 1) + \alpha_3(3x - 1) \stackrel{!}{=} 0$$

Wir ordnen nun die Gleichung nach Potenzen von x:

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2)x^2 + (-2\alpha_1 + 3\alpha_3)x + (2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) = 0$$

Die jeweiligen Potenzen von x sind Elemente der Monombasis und somit linear unabhängig. Daher kann diese Gleichung für beliebige x nur dann erfüllt sein, wenn die Koeffizienten jeweils einzeln null sind. Es muss also gelten:

$$\begin{aligned}\alpha_1 + 2\alpha_2 &= 0\\ -2\alpha_1 + 3\alpha_3 &= 0\\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssysmem gilt es nun zu lösen. Aus der ersten Gleichung folgt

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2}\alpha_1$$

und aus Gleichung zwei:

$$\alpha_3 = \frac{2}{3}\alpha_1$$

Setzen wir dies in Gleichung drei ein, so ergibt sich:

$$2\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_1 - \frac{2}{3}\alpha_1 = 0 \Rightarrow \frac{5}{6}\alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

Das Gleichungssystem besitzt also nur die triviale Lösung. Somit haben wir gezeigt, dass die gegebenen Polynome linear unabhängig sind.

3 Transformationsmatrix

Ein Vektor $\mathbf{x}$ wird in einer orthonormalen Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ durch $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ dargestellt.
a) Gegeben seien 2 neue Vektoren $\mathbf{e}'_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 + \sqrt{3}\mathbf{e}_2)$ und $\mathbf{e}'_2 = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$. Überprüfe, dass die Vektoren $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ linear unabhängig sind. Die Basisvektoren $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ werden in der neuen Basis $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ mit $\mathbf{e}_j = \mathbf{e}'_i a_{ij}$ dargestellt. Bestimme die Koordinaten a_{ij}.
b) Berechne die Koordinaten x'_i des Vektors $\mathbf{x}$ in der neuen Basis, wobei $\mathbf{x} = x'_i\mathbf{e}'_i$.
c) Die Transformationsmatrix $\mathbf{T} = (t_{ij})$ ist durch $x'_i = t_{ij}x_j$ definiert $((x_1, x_2) = (1, 2))$. Bestimme die Elemente der Matrix $\mathbf{T}$ und zeige, dass gilt $t_{ij} = a_{ij}$.

a) Zunächst wollen wir die neuen Basisvektoren auf lineare Unabhängigkeit prüfen. Hierfür können wir dieselbe Methode anwenden, wie schon im vorangegangenen Beispiel. Wären die beiden Vektoren linear abhängig, so müsste es Koeffizienten α_1, α_2 geben, sodass

$$\alpha_1\mathbf{e}'_1 + \alpha_2\mathbf{e}'_2 = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1(\mathbf{e}_1 + \sqrt{3}\mathbf{e}_2) + \alpha_2(-\sqrt{3}\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = \vec{0}$$

Hier wurden die Faktoren $\frac{1}{2}$ gleich weggelassen, da sich diese ohnehin wegkürzen lassen (weil auf der rechten Seite der Gleichung der Nullvektor steht). Wir können nun die Koeffizienten vor $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$ zusammenfassen und deren lineare Unabhängigkeit ausnützen:

$$(\alpha_1 - \sqrt{3}\alpha_2)\mathbf{e}_1 + (\sqrt{3}\alpha_1 + \alpha_2)\mathbf{e}_2 = \vec{0}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert für den Koeffizienten des Vektors $\mathbf{e}_1$:

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 - \sqrt{3}\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \sqrt{3}\alpha_2$$

und für $\mathbf{e}_2$:

$$\sqrt{3}\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\alpha_2$$

Die beiden Gleichungen sind offensichtlich nur zugleich erfüllbar, wenn $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Somit ist gezeigt, dass auch die beiden neuen Basisvektoren linear unabhängig sind. Nun sollen wir die alten Basiselemente bezüglich der neuen darstellen. Hierbei soll gelten:

$$\mathbf{e}_j = \mathbf{e}'_i a_{ij}$$

Bei diesem Audruck ist Vorsicht geboten. Da es sich nämlich bei $\mathbf{e}$ bereits um einen Vektor handelt, ist $\mathbf{e}_j$ ein zweidimensionales Objekt, und zwar die Matrix mit den Basisvektoren $\mathbf{e}$ spaltenweise eingetragen. Das heißt: $\mathbf{e}_j$ verfügt über einen „versteckten" Index, nämlich den Index des Vektors $\mathbf{e}$. $\mathbf{e}_j$ lautet also in reiner Indexschreibweise geschrieben e_{kj}. Somit muss gelten:

$$e_{kj} = e'_{ki} a_{ij}$$

oder in Matrix-Vektorform:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} \mathbf{A}$$

Mithilfe der Inversen können wir dies folgendermaßen umschreiben:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix}$$

Die Elemente der Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ lassen sich allerdings aus der Definition der neuen Basisvektoren leicht ablesen. Somit gilt:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Die gesuchte Matrix $\mathbf{A}$ finden wir schließlich durch Invertieren:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\det \mathbf{A}^{-1}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

b) Wir wollen nun die Koordinaten bezüglich der neuen Basis berechnen. Hierfür ist es wichtig zu wissen, dass der Vektor $\mathbf{x}$ an sich ein invariantes Objekt ist. Er wird dargestellt über das Produkt von Koordinaten mit den jeweiligen Basisvektoren. Deshalb können wir schreiben:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2\end{pmatrix} \mathbf{A} \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\end{pmatrix}$$

Durch Vergleich der Terme nach der Matrix mit den gestrichenen Basisvektoren wird klar, dass gilt:

$$\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+2\sqrt{3}\\ 2-\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

c) Aus dem Ergebnis von b) ist im Grunde die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ schon abzulesen. Dies kann aber auch elegant in Indexschreibweise gezeigt werden:

$$\mathbf{x} = x_j\mathbf{e}_j = x_j\mathbf{e}'_i a_{ij} = a_{ij}x_j\mathbf{e}'_i = x'_i\mathbf{e}'_i$$

Hieraus erkennt man wiederum, dass die Transformationsmatrix von den alten Koordinaten auf die neuen genau der Matrix $\mathbf{A}$ entspricht, und somit gilt:

$$t_{ij} = a_{ij}$$

Allgemein haben wir gezeigt, dass die Koordinaten eines Vektors genau invers zur Basis transformieren.