

# 3. Tutorium

## 1 Levi-Civita-Symbol

Das Levi-Civita-Symbol:

$$\varepsilon_{ijk\dots} = \begin{cases} +1 & \text{falls } (i, j, k, \dots) \text{ eine gerade Permutation von } (1, 2, 3, \dots) \text{ ist} \\ -1 & \text{falls } (i, j, k, \dots) \text{ eine ungerade Permutation von } (1, 2, 3, \dots) \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Gegeben seien zwei Vektoren  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  in einem kartesischen Koordinatensystem. Berechne  $\varepsilon_{ijk}a_jb_k + \delta_{jk}a_i a_j b_k$ .

b) Gegeben sei zusätzlich  $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Berechne  $\varepsilon_{ijk}a_i b_j c_k$ .

c) Berechne  $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijl}$  ( $1 \leq i, j, k \leq 3$ ).

d) Gegeben sei eine  $3 \times 3$ -Matrix  $\mathbf{A} = (a_{ij})$ . Schreibe mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols die Determinante  $\det \mathbf{A}$  in Indexschreibweise.

e) Berechne das Kreuzprodukt  $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j$  ( $1 \leq i, j, k \leq 3$ ) und schreibe mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols das Ergebnis, wobei

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

f) Schreibe mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols die Determinante  $\det \mathbf{B}$  für die Matrix

$$\mathbf{B} = (\mathbf{e}_i \quad \mathbf{e}_j \quad \mathbf{e}_k)$$

( $1 \leq i, k, k \leq 3$ ).

a) Zuerst betrachten wir die möglichen Permutationen von 1, 2 und 3. Eine Permutation ist eine Anordnung der drei Zahlen in einer bestimmten Reihenfolge. Dabei spricht man von einer geraden Permutation, wenn die Anordnung durch eine gerade Anzahl an Vertauschungen von zwei Elementen herbeigeführt werden kann, und von einer ungeraden Permutation, wenn eine ungerade Zahl an Vertauschungen zu einem bestimmten Zustand führt. Sind alle Elemente unterscheidbar (was in diesem Beispiel der Fall ist), so gilt für die Zahl der Permutationen  $N$  von  $n$  Elementen:

$$N = n! = 3! = 6$$

für  $n = 3$ , wie in unserem Fall.

Wir schreiben diese nun für die Zahlen 1, 2 und 3 explizit an, wobei wir Schritt für Schritt je zwei Elemente vertauschen:

$$\underbrace{1\ 2\ 3}_{\text{gerade}} \longrightarrow \underbrace{2\ 1\ 3}_{\text{ungerade}} \longrightarrow \underbrace{2\ 3\ 1}_{\text{gerade}} \longrightarrow \underbrace{3\ 2\ 1}_{\text{ungerade}} \longrightarrow \underbrace{3\ 1\ 2}_{\text{gerade}} \longrightarrow \underbrace{1\ 3\ 2}_{\text{ungerade}}$$

Betrachten wir nun das Objekt  $\varepsilon_{ijk}a_jb_k$ , so wissen wir nun, dass dies eine vektorielle Größe mit Index  $i$  ist. In diesem Beispiel wollen wir nun langsam Schritt für Schritt jede Komponente dieses Vektors anschreiben, um ein gewisses Gefühl dafür zu erhalten, was das Levi-Civita-Symbol in dem betrachteten Ausdruck bewirkt.

- Für  $i = 1$ : Hier wird das Levi-Civita-Symbol nur dann nicht 0, wenn  $j, k \in \{2, 3\}$ . Ist  $i = 1$ ,  $j = 2$  und  $k = 3$ , so ist  $ijk$  eine gerade Permutation von 1, 2 und 3 und es gilt somit  $\varepsilon_{ijk} = 1$ . Diese Kombination der Indices ergibt also einen Term  $a_2b_3$  in der ersten Komponente. Die zweite mögliche Indexkombination für  $i = 1$  ist, wie erwähnt,  $i = 1$ ,  $j = 3$  und  $k = 2$ . Hierbei handelt es sich um eine ungerade Permutation, was dazu führt, dass der Term  $a_3b_2$  negativ in die erste Komponente eingeht. Die vollständige erste Komponente lautet daher:

$$\varepsilon_{1jk}a_jb_k = a_2b_3 - a_3b_2$$

- Für  $i = 2$ : Analog zur ersten Komponente funktionieren auch die Überlegungen für die zweite. In diesem Fall existieren für  $i, j$  und  $k$  die Möglichkeiten 2, 1 und 3 beziehungsweise 2, 3 und 1. Ein Vergleich mit den Überlegungen zu den Permutationen von 1, 2 und 3 führt uns zur zweiten Komponente:

$$\varepsilon_{2jk}a_jb_k = a_3b_1 - a_1b_3$$

- Für  $i = 3$ : Hier bleiben noch die Permutationen 3, 1, 2 und 3, 2, 1. Mit dem Levi-Civita-Symbol ergibt sich daher für die dritte Komponente:

$$\varepsilon_{3jk}a_jb_k = a_1b_2 - a_2b_1$$

Somit können wir zusammenfassend schreiben:

$$\varepsilon_{ijk}a_jb_k = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}_i$$

Anhand dieser Struktur erkennt man allerdings, dass es sich hierbei um nichts anderes als das Vektor- bzw. Kreuzprodukt zwischen  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  handelt. Nun fehlt noch die Berechnung des Terms  $\delta_{jk}a_i a_j b_k$ . Durch die Anwesenheit des Kronecker-Deltas  $\delta_{jk}$  können wir in diesem Ausdruck einen der Indices  $j$  und  $k$  in den anderen umwandeln. Das heißt:

$$\delta_{jk}a_i a_j b_k = a_i a_j b_j$$

Bei  $a_j b_j$  handelt es sich aber schlichtweg um das Skalarprodukt zwischen  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$ . Somit können wir schließlich unser Endergebnis anschreiben:

$$\varepsilon_{ijk} a_j b_k + \delta_{jk} a_i a_j b_k = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i + \mathbf{a} \mathbf{b} a_i = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}_i + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}_i$$

b) Nun haben wir einen zusätzlichen Vektor  $c_i$  gegeben und wollen den Ausdruck  $\varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$  berechnen. Mit dem Wissen aus dem ersten Teilbeispiel ist diese Aufgabe leicht lösbar. Wir wissen, dass sich das Vektorprodukt zwischen  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  schreiben lässt als

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$$

Genaugut können wir allerdings die Indices umbenennen, sodass die eben angeschriebene Gleichung übergeht in

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_k = \varepsilon_{kij} a_i b_j = \varepsilon_{ijk} a_i b_j$$

Letztere Gleichheit gilt deshalb, weil  $ijk$  eine gerade Permutation von  $kij$  ist und deshalb das Ergebnis durch dieses Vertauschen der Indices nicht verändert wird, da ja alle Vorzeichen gleich gelassen werden. Somit gilt:

$$\varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_k c_k = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = -2$$

Hierbei ist noch anzumerken, dass man das Ergebnis aufgrund derselben Herleitung wie oben durchgeführt auf mehrere Arten anschreiben kann:

$$\varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$$

Ein anderer Lösungsweg - ohne das Vorwissen aus dem ersten Teilbeispiel - wäre das direkte Anschreiben der Terme in der Summe. Es bleiben nur diejenigen Kombinationen der Vektoren  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  übrig, deren Indices eine Permutation der Zahlen 1, 2 und 3 darstellen, insgesamt also sechs Terme. Versehen wir diese aufgrund gerader bzw. ungerader Permutationen noch mit dem richtigen Vorzeichen, so ergibt sich:

$$\varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 = -2$$

Bei genauerer Betrachtung erkennt man, dass es sich hierbei genau um die Determinante derjenigen Matrix handelt, in deren Spalten die Vektoren  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  eingeschrieben sind.

c) Nun sollen wir den Ausdruck  $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijl}$  berechnen. Wir erkennen, dass zwei freie Indices vorhanden sind, weswegen wir wissen, dass es sich bei dem Ergebnis um ein zweidimensionales Objekt handeln muss - das heißt, eine Matrix mit den Indices  $k$  und  $l$ . Wir treffen nun eine Fallunterscheidung:

- Für  $k \neq l$ : Sind  $k$  und  $l$  nicht gleich, so kann das Ergebnis nur dann ungleich 0 sein, wenn im ersten Levi-Civita-Symbol gilt  $i, j \neq k$  und im zweiten  $i, j \neq l$ . Da aber  $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$  und  $k \neq l$ , müsste entweder für  $i$  oder für  $j$  gelten:  $i \neq i$ . Diese Bedingung ist allerdings nicht erfüllbar, weswegen für  $k \neq l$  nur Kombinationen von  $i, j$  und  $k$  möglich sind, die keine Permutationen von 1, 2 und 3 darstellen. Das Ergebnis ist in diesem Fall also 0.
- Für  $k = l$ : Wenn  $k$  und  $l$  gleich sind, dann geht  $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijl}$  über in  $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}$ . Die beiden Levi-Civita-Symbole sind aber immer entweder 0, 1 oder -1. Summiert man also über alle möglichen Werte, so ergibt sich  $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 0^2 + 1^2 + (-1)^2 = 2$ .

Zusammenfassend wissen wir nun also:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijl} = \begin{cases} 2 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

Mit unserem Wissen über das Kronecker-Delta können wir dies schreiben als:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$$

d) In diesem Beispiel wollen wir die Determinante einer Matrix  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols anschreiben. Um zum richtigen Resultat zu kommen, gibt es mehrere Möglichkeiten. Wir wissen bereits aus dem zweiten Teilbeispiel, dass  $\varepsilon_{ijk}a_i b_j c_k$  die Determinante der Matrix mit den Vektoren  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  in ihren Spalten beschreibt. Mit diesem Wissen können wir im Grunde sofort die Determinante der Matrix  $\mathbf{A}$  anschreiben:

$$\det \mathbf{A} = \varepsilon_{ijk}a_{i1}a_{j2}a_{k3}$$

Eine andere Möglichkeit wäre es, die Regel von Sarrus in ihren einzelnen Termen geschickt auszuschreiben. Es gilt:

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Man erkennt, dass die Spaltenindices jeweils aufsteigend geordnet sind  $(1, 2, 3)$ , was für die fixierten Spaltenindices in der Darstellung über das Levi-Civita-Symbol verantwortlich ist. Betrachtet man die Zeilenindices, wird bei einem Vergleich mit den oben angeschriebenen Permutationen von 1, 2 und 3 klar, dass es sich bei den positiven Termen genau um die drei geraden Permutationen der Zeilenindices, bei den negativen Termen jedoch um die ungeraden Permutationen der Zeilenindices handelt. Auch diese Erkenntnis führt uns sofort auf die oben angegebene Darstellung von  $\det \mathbf{A}$ .

e) Nun wollen wir das Vektorprodukt  $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j$  berechnen. Ein möglicher Lösungsweg ist das exemplarische Berechnen der verschiedenen Kombinationen.

- Für  $i = j$ : In diesem Fall ist das Kreuzprodukt sicher null, da das Vektorprodukt eines Vektors mit sich selbst (bzw. mit einem beliebigen parallelen Vektor) immer den Nullvektor ergibt.
- Für  $i \neq j$ : In diesem Fall setzen wir ein und bemerken schnell ein Muster:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2 \end{array}$$

Wir erkennen, dass die Vorzeichen der Ergebnisse bei einer gewissen Permutation der Indices genau dem Wert des Levi-Civita-Symbols bei dieser Permutation entsprechen. Es lässt sich daher schreiben:

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k = \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_j$$

f) Mit diesem Wissen fällt es uns nun nicht mehr schwer, die Determinante der Matrix  $\mathbf{B}$  zu berechnen. Aus dem zweiten Teilbeispiel wissen wir noch, dass wir die Determinante der  $3 \times 3$  Matrix  $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3)$  anschreiben können als

$$\det \mathbf{B} = (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) \cdot \mathbf{b}_3 = (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k$$

Da wir aber das Ergebnis von  $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j$  bereits kennen, lässt sich dies schreiben als

$$\det \mathbf{B} = \varepsilon_{ijl} \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_k$$

Das innere Produkt  $\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_k$  ergibt jedoch schlicht  $\delta_{lk}$ , sodass gilt:

$$\det \mathbf{B} = \varepsilon_{ijk}$$

## 2 Duale Basis

Die duale Basis  $\{\mathbf{f}_1^*, \mathbf{f}_2^*\} := \{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2\}$  wird über  $[\mathbf{f}_i^*, \mathbf{f}_j] = \mathbf{f}_i^* \cdot \mathbf{f}_j = \delta_{ij}$  bzw.  $[\mathbf{f}^i, \mathbf{f}_j] = \mathbf{f}^i \cdot \mathbf{f}_j = \delta_j^i$  definiert. Der Vektor  $\mathbf{x} = x^i \mathbf{f}_i$  wird in der dualen Basis mit  $\mathbf{x} = x'_i \mathbf{f}^i$  dargestellt.

- Finde die dualen Basisvektoren  $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2\}$  zu einer orthonormalen Basis  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ .
- Durch die Transformationsmatrix  $\mathbf{S} = (s^i_j)$  wird die orthonormale Basis  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  in die neue Basis  $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$  transformiert, d.h.  $\mathbf{f}_j = \mathbf{e}_i s^i_j$ . Schreibe die Transformationsmatrix  $\mathbf{S}$  für die Basisvektoren  $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$  und  $\mathbf{f}_2 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ .
- Berechne die Koordinaten  $x^1$  und  $x^2$  in  $\mathbf{x} = x^i \mathbf{f}_i$  für den Vektor  $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ . Schreibe auch die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$ , deren Elemente durch  $x'^i = t^i_j x^j$  definiert sind. ( $x^1, x^2$  sind die Koordinaten in der Basis  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ , d.h.  $(x^1, x^2) = (1, 2)$ .)
- Bestimme die dualen Basisvektoren  $\{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2\}$  zur Basis  $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$  und schreibe die Transformationsmatrix  $\mathbf{S}^*$  an, wobei  $\mathbf{f}^i = s^{*i}_j \mathbf{e}^j$ .

- e) Berechne die Koordinaten  $x'_1$  und  $x'_2$  in  $\mathbf{x} = x'_i \mathbf{f}^i$ . Schreibe auch die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}^*$  an, wobei  $x'_j = x_i t^{*ij}$ . ( $x_1, x_2$  sind die Koordinaten in der dualen Basis  $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2\}$ .)  
 f) Berechne die Skalarprodukte  $\langle \mathbf{f}^i | \mathbf{x} \rangle$  und  $\langle \mathbf{f}_i | \mathbf{x} \rangle$  für ( $i = 1, 2$ ) und überprüfe, dass gilt  $x'^i = \langle \mathbf{f}^i | \mathbf{x} \rangle$  und  $x'_i = \langle \mathbf{f}_i | \mathbf{x} \rangle$ .  
 g) Berechne  $x_i x^i$  und  $x'_i x'^i$ .

- a) Wir wenden die Definitionsgleichung für die duale Basis an:

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_j^i$$

Das bedeutet aber, dass wir in Matrixschreibweise schreiben können:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \end{pmatrix} (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2) = \mathbf{I}$$

wobei  $\mathbf{I}$  die Einheitsmatrix bezeichnet. Dann folgt aber:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2)^{-1}$$

Und da wir wissen, dass  $\mathbf{e}_1$  und  $\mathbf{e}_2$  eine Orthonormalbasis bilden und die Inverse einer orthogonalen Matrix ihre Transponierte ist, lässt sich schreiben:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2)^T$$

- b) Laut Angabe soll gelten:

$$(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \quad 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2) \mathbf{S}$$

Dann ist aber das Bestimmen von  $\mathbf{S}$  reine Ablesearbeit und es gilt:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- c) Da wir wissen, dass der Vektor  $\mathbf{x}$  an sich ein invariantes Objekt ist, jedoch mit verschiedenen Koordinaten bezüglich verschiedener Basen dargestellt werden kann, können wir schreiben:

$$\mathbf{x} = x^j \mathbf{e}_j = x'^i \mathbf{f}_i$$

Jedoch gilt

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_j s^j_i$$

Deswegen wissen wir:

$$\mathbf{x} = x'^i \mathbf{f}_i = x'^i \mathbf{e}_j s^j_i = s^j_i x'^i \mathbf{e}_j$$

Somit gilt aber:

$$\mathbf{x} = x^j \mathbf{e}_j = s^j_i x'^i \mathbf{e}_j$$

Vergleichen wir die jeweiligen Terme vor  $\mathbf{e}_j$ , so erkennen wir:

$$x^j = s^j_i x'^i$$

Nun wollen wir jedoch die gestrichenen Koordinaten abhängig von den alten darstellen:

$$x'^i = (\mathbf{S}^{-1})^i_j x^j \Rightarrow \mathbf{T} = (\mathbf{S}^{-1})$$

Wir müssen also  $\mathbf{S}$  invertieren:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{T} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Somit können wir die gestrichenen Koordinaten aus den nicht gestrichenen berechnen:

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) Wieder können wir die Argumentation aus dem ersten Teilbeispiel verwenden:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix} (\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2) = \mathbf{I} \Rightarrow (\mathbf{f}^1 \quad \mathbf{f}^2) = (\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2)^{-1}$$

Da wir aber wissen:

$$(\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2) = (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2) \mathbf{S}$$

lässt sich schreiben:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix} = ((\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2) \mathbf{S})^{-1} = \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2)^{-1} = \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{e}^1 \quad \mathbf{e}^2)$$

Somit haben wir die gesuchte Transformationsmatrix von den dualen Basisvektoren der orthonormalen Basis zur Dualbasis des gestrichenen Systems gefunden:

$$\mathbf{S}^* = \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{T}$$

Allgemein gilt, dass bei der Transformation von einer orthonormalen auf eine beliebige andere Basis im Vektorraum die dualen Basiselemente genau invers dazu transformieren.

e) Wie wir bereits mehrfach ergründet haben, transformieren die Koordinaten genau invers zu den Basiselementen. Dies wird durch folgende Argumentation ersichtlich:

$$\mathbf{x} = x_j \mathbf{e}^j = x'_i \mathbf{f}^i = x'_i t^i_j \mathbf{e}^j \Rightarrow x_j = x'_i t^i_j \Rightarrow x'_i = x_j (\mathbf{T}^{-1})^j_i = x_j s^j_i$$

Somit lassen sich die dualen Koordinaten bezüglich der gestrichenen Basis leicht berechnen:

$$(x'_1 \quad x'_2) = (1 \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (-1 \quad 4)$$

f) Der Vektor  $\mathbf{x}$  ist darstellbar als  $\mathbf{x} = x^j \mathbf{f}_j$  bzw.  $\mathbf{x} = x_j \mathbf{f}^j$ . Dann können wir die Skalarprodukte umschreiben:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^i \mathbf{x} &= \mathbf{f}^i x^j \mathbf{f}_j = x'^j \mathbf{f}^i \mathbf{f}_j = x'^j \delta^i_j = x'^i \\ \mathbf{f}_i \mathbf{x} &= \mathbf{f}_i x'_j \mathbf{f}^j = x'_j \mathbf{f}_i \mathbf{f}^j = x'_j \delta_i^j = x'_i \end{aligned}$$

g) Hier müssen wir nur noch die Ergebnisse aus den anderen Teilbeispielen einsetzen:

$$x_i x^i = (1 \ 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5$$

$$x'_i x'^i = (-1 \ 4) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5$$