4. Tutorium

1 Levi-Civita-Symbol (II)

a) Zeige für eine 3×3 Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$, dass gilt

$$\varepsilon_{lmn} a_{li} a_{mj} a_{nk} = \varepsilon_{ijk} \det \mathbf{A}$$

b) Zeige mit Hilfe des levi-Civita-Symbols, dass gilt

$$\det(\mathbf{AB}) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$$

für 3×3 Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$.
c) Zeige $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$. (Einsteinsche Summenkonvention beachten).

---

a) Um dieses Beispiel zu lösen, bedienen wir uns der Ergebnisse des dritten Tutoriums. Dort zeigten wir, dass sich die Determinante der Matrix $\mathbf{A}$ darstellen lässt als

$$\det \mathbf{A} = \varepsilon_{ijk} a_{i1} a_{j2} a_{k3} = \varepsilon_{lmn} a_{l1} a_{m2} a_{n3}$$

Zudem fanden wir heraus, dass für beliebige Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ gilt:

$$\varepsilon_{ijk} a_j b_k = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i$$

und somit die Determinante der Matrix $\mathbf{A}$ geschrieben werden kann als

$$\det \mathbf{A} = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)$$

Nun sind in dem Ausdruck, den wir berechnen wollen, die Spalten nicht mehr fixiert, sondern können die Positionen wechseln. Wir können also schreiben:

$$\varepsilon_{lmn} a_{li} a_{mj} a_{nk} = \mathbf{a}_i \cdot (\mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_k)$$

Nun können wir betrachten, was mit dem Ergebnis von $\det \mathbf{A}$ geschieht, wenn wir Indices vertauschen. Vertauschen wir beispielsweise in ε_{lmn} die Indices l und m, so kommt ein Minus vor das Ergebnis (da durch dieses Vertauschen die ungeraden Permutationen zu geraden und umgekehrt). Dies entspricht genau einem Vertauschen der Indices im obigen Term $\mathbf{a}_i \cdot (\mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_k)$. Das heißt:

$$\varepsilon_{mln} a_{l1} a_{m2} a_{n3} = -\varepsilon_{lmn} a_{l1} a_{m2} a_{n3} = -\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) = \mathbf{a}_2 \cdot (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3) = -\det \mathbf{A}$$

Auf diese Art und Weise kann man alle Permutationen von m, l und n bilden und findet so, dass gerade Permutationen der Indices i, j und k auf $\varepsilon_{lmn} a_{li} a_{mj} a_{nk} = \det \mathbf{A}$ führen und ungerade Permutationen von i, j und k auf $\varepsilon_{lmn} a_{li} a_{mj} a_{nk} = -\det \mathbf{A}$. Nun betrachten wir noch Kombinationen von i, j und k, bei denen es sich nicht um Permutationen von 1, 2 und 3 handelt, das heißt, bei denen ein Index doppelt vorkommt. Hierfür betrachten wir wieder den Ausdruck

$$\varepsilon_{lmn} a_{li} a_{mj} a_{nk} = \mathbf{a}_i \cdot (\mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_k)$$

Wenn hier nun zwei Indices gleich sind, so ergeben sich zwei Möglichkeiten. Entweder $j = k$, was aber auf das Ergebnis 0 führen würde, da das Vektorprodukt von zwei gleichen Vektoren den Nullvektor ergibt, oder $i = j \wedge i = k$, was aber wieder zum selben Ergebnis führen würde, da dann das Vektorprodukt normal auf $\mathbf{a}_i$ stehen würde und deshalb das Skalarprodukt 0 wird. Somit haben wir also gezeigt, dass gilt:

$$\varepsilon_{lmn} a_{li} a_{mj} a_{nk} = \varepsilon_{ijk} \det \mathbf{A}$$

b) Mit dem Ergebnis aus dem ersten Teilbeispiel ist es uns nun ein leichtes, den Determinantenmultiplikationssatz zu zeigen. Multiplizieren wir beide Seiten in der Gleichung oben mit $b_{i1} b_{j2} b_{k3}$, so ergibt sich:

$$\varepsilon_{lmn} a_{li} a_{mj} a_{nk} b_{i1} b_{j2} b_{k3} = \varepsilon_{ijk} \det \mathbf{A}\, b_{i1} b_{j2} b_{k3}$$

Nun betrachten wir beide Seiten gesondert voneinander. Die linke Seite können wir schreiben als:

$$\varepsilon_{lmn} a_{li} b_{i1} a_{mj} b_{j2} a_{nk} b_{k3}$$

Vergleichen wir dies allerdings mit unserer allgemeinen Form der Determinante einer 3×3 Matrix, so erkennen wir, dass es sich hierbei genau um $\det(\mathbf{AB})$ handelt. Die rechte Seite wiederum lässt sich schreiben als:

$$\varepsilon_{ijk} b_{i1} b_{j2} b_{k3} \det \mathbf{A}$$

Bei $\varepsilon_{ijk} b_{i1} b_{j2} b_{k3}$ handelt es sich jedoch um die Determinante der Matrix $\mathbf{B}$. Somit haben wir gezeigt:

$$\det(\mathbf{AB}) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$$

c) Um diese Identität zu zeigen, können wir zwei verschiedene Wege wählen. Der erste Weg basiert auf Wissen, das wir uns sowohl in dieser als auch in den vergangenen Übungen angeeignet haben. Wir erinnern uns, dass gilt:

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_i & \mathbf{e}_j & \mathbf{e}_k \end{pmatrix} = \varepsilon_{ijk}$$

Der gegebene Ausdruck $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm}$ kann somit mit Hilfe von Determinanten geschrieben werden:

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_i & \mathbf{e}_j & \mathbf{e}_k \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_k & \mathbf{e}_l & \mathbf{e}_m \end{pmatrix}$$

Nun wenden wir den oben bereits bewiesenen Determinantenmultiplikationssatz und den Umstand, dass $\det \mathbf{M} = \det \mathbf{M}^T$, an, und es ergibt sich:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \det\left(\begin{pmatrix}\mathbf{e}_i & \mathbf{e}_j & \mathbf{e}_k\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}\mathbf{e}_k & \mathbf{e}_l & \mathbf{e}_m\end{pmatrix}\right)$$

Nun können wir die Matrizen in der Determinante multiplizieren, und mit $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ ergibt sich:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \det\begin{pmatrix}\delta_{ik} & \delta_{il} & \delta_{im}\\ \delta_{jk} & \delta_{jl} & \delta_{jm}\\ 3 & \delta_{kl} & \delta_{km}\end{pmatrix}$$

Der Rest ist reine Rechenarbeit:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} &= \delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{jk}\delta_{kl}\delta_{im} + 3\delta_{il}\delta_{jm} - 3\delta_{jl}\delta_{im} - \delta_{kl}\delta_{jm}\delta_{ik} - \delta_{jk}\delta_{il}\delta_{km}\\ &= \delta_{im}\delta_{jl} + \delta_{im}\delta_{jl} + 3\delta_{il}\delta_{jm} - 3\delta_{im}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{il}\delta_{jm}\\ &= \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\end{aligned}$$

Somit ist die zu zeigende Identität bewiesen. Dies wollen wir noch auf andere Art und Weise, und zwar über eine rigorose Fallunterscheidung, bewerkstelligen.

- für $i = j$:
  - Linke Seite: In diesem Fall kann es sich bei i, j, k nicht um eine Permutation von 1, 2 und 3 handeln, somit gilt: $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = 0$
  - Rechte Seite:
    - Für $j = m$: $\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} = \delta_{il} - \delta_{il} = 0$
    - Für $j \neq m$: $\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} = \delta_{jm}\delta_{jl} - \delta_{jl}\delta_{jm} = 0$
- für $l = m$: Dieselben Überlegungen funktionieren auch für $l = m$.
- für $i \neq j \wedge l \neq m$ und $i + j \neq l + m$:
  - Linke Seite: Da der Index k bei beiden Levi-Civita-Symbolen gleich ist, kann es sich bei der Anordnung der Indices nur dann bei beiden um eine Permutation von 1, 2 und 3 handeln, wenn $i + j = l + m$. Daher gilt in diesem Fall: $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = 0$
  - Rechte Seite: Hier haben wir wieder zwei Möglichkeiten:
    - $i = l \Rightarrow j \neq m$, dann gilt aber wegen $i \neq j$ und $i = l$ auch $j \neq l$. Dann können wir schreiben: $\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} = 0$.
    - $i = m \Rightarrow j \neq l$, dann können wir aber wieder schließen: $i = m$, $i \neq j \Rightarrow j \neq m$. Somit gilt: $\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} = 0$.

- für $i \neq j \wedge l \neq m$ und $i+j=l+m$
  - $i=l \Rightarrow j=m \Rightarrow \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = (\pm 1)^2 = 1$
    $\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$
  - $i=m \Rightarrow j=l \Rightarrow \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = (\pm 1)(\mp 1) = -1$
    $\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$

Somit haben wir gezeigt, dass die linke und die rechte Seite der Gleichung für alle möglichen Kombinationen der Indices gleich sind.

2 Orthogonalprojektion

---

a) Gegeben sei ein Vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in einem kartesischen Koordinatensystem. Wie lautet der zugehörige Projektor $\mathbf{E_x}$ in der Matrix-Form?
b) Berechne $(\mathbf{E_x})^n$.
c) Berechne $(\mathbf{I} - \mathbf{E_x})(\mathbf{I} + \mathbf{E_x})^2\mathbf{x}$.

---

a) Der Projektor $\mathbf{E_x}$ berechnet sich folgendermaßen:

$$\mathbf{E_x} = \frac{|\mathbf{x}\rangle\langle\mathbf{x}|}{\langle\mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle}$$

Das dyadische Produkt $|\mathbf{x}\rangle\langle\mathbf{x}|$ (auch äußeres oder tensorielles Produkt genannt) ist für einen Vektor $\mathbf{x}$ die Matrix $\mathbf{E_x}$ mit den Einträgen $e_{ij} = x_i x_j$. Für den gegebenen Vektor $\mathbf{x}$ lautet es daher:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Das innere Produkt $\langle\mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle$ berechnet sich wie gewohnt:

$$\langle\mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

Somit gilt für den Projektor $\mathbf{E_x}$:

$$\mathbf{E_x} = \frac{|\mathbf{x}\rangle\langle\mathbf{x}|}{\langle\mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Wir berechnen zunächst $(\mathbf{E_x})^2$, woraus wir Schlüsse auf den gesuchten Ausdruck $(\mathbf{E_x})^n$ ziehen werden können:

$$\mathbf{E_x}^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E_x}$$

Somit ist jedoch auch gezeigt, dass $(\mathbf{E_x})^n = \mathbf{E_x}$. Diese Eigenschaft heißt „Idempotenz“ und gilt im Allgemeinen für Projektoren beliebiger Vektoren.
c) Nun sollen wir den Ausdruck $(\mathbf{I} - \mathbf{E_x})(\mathbf{I} + \mathbf{E_x})^2\mathbf{x}$ berechnen. Hierfür können wir uns zu Nutze machen, dass es sich sowohl bei der Einheitsmatrix als auch beim Projektor jeweils um idempotente Matrizen handelt. Daher können wir schreiben:

$$\begin{aligned}(\mathbf{I} - \mathbf{E_x})(\mathbf{I} + \mathbf{E_x})^2\mathbf{x} &= (\mathbf{I} - \mathbf{E_x})(\mathbf{I}^2 + \mathbf{I}\mathbf{E_x} + \mathbf{E_x}\mathbf{I} + \mathbf{E_x}^2)\mathbf{x} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{E_x})(\mathbf{I} + 3\mathbf{E_x})\mathbf{x} \\ &= (\mathbf{I}^2 - \mathbf{I}\mathbf{E_x} + 3\mathbf{I}\mathbf{E_x} - 3\mathbf{E_x}^2)\mathbf{x} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{E_x})\mathbf{x} \\ &= \mathbf{x} - \mathbf{E_x}\mathbf{x}\end{aligned}$$

Da aber die Projektionsmatrix $\mathbf{E_x}$ den Vektor $\mathbf{x}$ auf sich selbst abbildet, lässt sie diesen invariant. Daher gilt:

$$\mathbf{x} - \mathbf{E_x}\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

3 Differentialoperatoren

Ein 3-dimensionaler Vektor sei mit $\mathbf{x} = x_i\mathbf{e}_i$ in der Standardbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ dargestellt.
a) Berechne für $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ den Ausdruck $\partial_i(x_i x_k x_k)$.
b) Berechne $\text{grad}\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}$.
c) Berechne $\text{rot}(\mathbf{p} \times \mathbf{x})$, wobei $\mathbf{p} = p_i\mathbf{e}_i$ ein konstanter Vektor ist.

---

a) Für das Verständnis des Beispiels betrachten wir zunächst die Wirkung von ∂_i auf eine beliebige Koordinate x_j. Da es sich hier um partielle Ableitungen handelt, wissen wir: wenn eine Koordinate nach sich selbst abgeleitet wird, so ist das Ergebnis 1, wenn sie nach einer anderen Koordinate abgeleitet wird, dann ist das Ergebnis 0. Das heißt:

$$\partial_i x_j = \delta_{ij}$$

Dann können wir den gegebenen Ausdruck aber einfach mit der Produktregel ableiten:

$$\partial_i(x_i x_k x_k) = x_k x_k \partial_i x_i + 2x_i x_k \partial_i x_k = x_k x_k \delta_{ii} + 2x_i x_k \delta_{ik}$$

Und da wir bereits aus vergangenen Tutorien wissen, dass $\delta_{ii} = d = 3$, können wir schreiben:

$$\partial_i(x_i x_k x_k) = 3x_k x_k + 2x_k x_k = 5x_k x_k$$

b) Das Symbol ∂_i aus dem ersten Teilbeispiel beschreibt nichts anderes als den Gradienten. Daher können wir schreiben:

$$\left(\text{grad}\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right)_i = \partial_i(x_k x_k)^{-1}$$

Dies können wir dann wieder mit einfachen Ableitungsregeln berechnen:

$$\partial_i (x_k x_k)^{-1} = -(x_k x_k)^{-2} \partial_i (x_j x_j) = -(x_k x_k)^{-2} 2\delta_{ij} x_j = -2 \frac{x_i}{(x_k x_k)^2}$$

c) Die Rotation lässt sich in Indexschreibweise (mit dem Wissen über Vektorprodukte) folgendermaßen ausdrücken:

$$\mathrm{rot}(\mathbf{p} \times \mathbf{x}) = \vec{\nabla} \times (\mathbf{p} \times \mathbf{x}) = \varepsilon_{ijk} \partial_j (\mathbf{p} \times \mathbf{x})_k = \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} p_l x_m$$

Da die Indexschreibweise das Vertauschen der einzelnen Terme des Produktes erlaubt, können wir dies umschreiben auf

$$\mathrm{rot}(\mathbf{p} \times \mathbf{x}) = p_l \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \partial_j x_m$$

Nun haben wir aber bereits oben gezeigt, dass $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$, und wissen zudem, dass $\partial_j x_m = \delta_{jm}$. Somit können wir schreiben:

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}(\mathbf{p} \times \mathbf{x}) &= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\delta_{jm} p_l \\ &= (\delta_{il}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{jl}) p_l \\ &= (3\delta_{il} - \delta_{il}) p_l \\ &= 2\delta_{il} p_l = 2p_i \end{aligned}$$

4 Spektraltheorem

a) Schreibe die gekoppelten linearen Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{4}{3} x_1 + \frac{\sqrt{2}}{3} x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \frac{\sqrt{2}}{3} x_1 + \frac{5}{3} x_2$$

in die Matrix-Vektorform $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{A}\mathbf{x}$ um, wobei $\mathbf{A}$ eine 2×2 Matrix ist und $\mathbf{x} = (x_1 \quad x_2)^T$. Berechne die Eigenwerte λ_1, λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$) und die normierten Eigenvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ der Matrix $\mathbf{A}$.
b) $\mathbf{E}_i$ sei der Projektor zum Vektor $\mathbf{e}_i$. Schreibe die Projektoren $\mathbf{E}_1$ und $\mathbf{E}_2$ im Matrixform an und zeige $\mathbf{A} = \lambda_i \mathbf{E}_i$.
c) Stelle die Differentialgleichungen nach $x_1'(t) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1$ und $x_2'(t) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_2$ um und löse die Gleichungen.
d) Zeige, dass die Lösung der Differentialgleichung durch $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$ gegeben wird, wobei $e^{\mathbf{A}t} = e^{\lambda_i t}\mathbf{E}_i$.

a) Das Problem in Matrix-Vektorform umzuschreiben ist reines Ablesen, da augenscheinlich gilt:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 5 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Um die Eigenwerte der Matrix zu berechnen, stellen wir das charakteristische Polynom als $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ auf und setzen es gleich null:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det\begin{pmatrix} \frac{4}{3} - \lambda & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{5}{3} - \lambda \end{pmatrix} = \left(\frac{4}{3} - \lambda\right)\left(\frac{5}{3} - \lambda\right) - \frac{2}{9} \stackrel{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1$$

Nun berechnen wir die Eigenvektoren, hierfür setzen wir die jeweiligen Eigenwerte in $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ ein und lösen das Gleichungssystem. (Hinweis: Bei einer 2×2 kann man sich das Leben leicht machen, da die beiden Gleichungen des erhaltenen Gleichungssystems - sofern man die Eigenwerte richtig berechnet hat - dieselbe Information enthalten. Es reicht also aus, wenn man die Relation zwischen den Komponenten der Eigenvektoren aus nur einer Zeile bestimmt. In den folgenden Rechnungen betrachten wir jeweils nur die erste Zeile.) Somit ergibt sich:

- Für $\lambda_1 = 2$:

  $$\left(\frac{4}{3} - 2\right) v_1 + \frac{\sqrt{2}}{3} v_2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2}\, v_1$$

  Beschreibt $\mathcal{N}$ die Normierung des Eigenvektors, so gilt:

  $$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\mathcal{N}}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

- Für $\lambda_2 = 1$:

  $$\left(\frac{4}{3} - 1\right) v_1 + \frac{\sqrt{2}}{3} v_2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow v_1 = -\sqrt{2}\, v_2$$

  Somit können wir auch den zweiten Eigenvektor anschreiben:

  $$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\mathcal{N}}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Nun berechnen wir die Projektoren zu den jeweiligen Eigenvektoren. Wir erinnern uns an die Formel zur Berechnung eines Projektors:

$$\mathbf{E}_i = \frac{|\mathbf{e}_i\rangle\langle\mathbf{e}_i|}{\langle\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_i\rangle}$$

Da wir die Vektoren bereits normiert haben, wissen wir, dass

$$\langle\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_i\rangle = 1,$$

womit der Projektor über das äußere Produkt des normierten Eigenvektors mit sich selbst gegeben ist. Somit gilt:

$$\mathbf{E}_1 = |\mathbf{e}_1\rangle \langle \mathbf{e}_1| = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}_2 = |\mathbf{e}_2\rangle \langle \mathbf{e}_2| = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Nun prüfen wir noch nach, ob tatsächlich $\mathbf{A} = \lambda_i \mathbf{E}_i$, das heißt es soll gelten:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 5 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 2 \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 5 \end{pmatrix}$$

Die Gleichung ist also erfüllt. c) Nun wollen wir das Differentialgleichungssystem für das gestrichene System, also das System der Eigenvektoren, anschreiben. Wir wissen, dass gilt:

$$\overbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}}^{\text{Eigenbasis}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{kart. Basis}} \overbrace{\mathbf{S}}^{\text{Transf.}}$$

Das heißt, die Eigenbasis selbst transformiert die Basisvektoren von der alten (kartesischen) in die neue (Eigen-) Basis. Damit wissen wir aber auch, dass die Koordinaten genau invers zu $\mathbf{S}$ transformieren. Nun können wir uns das Umschreiben des Differentialgleichungssystems folgendermaßen vorstellen:

- Wir wollen eine Gleichung der Form

  $$\frac{d\mathbf{x}'}{dt} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}'$$

  Wir gehen nun vom Vektor $\mathbf{x}'$ aus. Zuerst transformieren wir seine Koordinaten so, dass sie bezüglich der nicht gestrichenen Koordinaten dargestellt werden. Dies machen wir, indem wir den Vektor auf die Matrix $\mathbf{S}$ multiplizieren.

- Als nächsten Schritt wenden wir die Matrix $\mathbf{A}$ an, was ja unsere Differentialgleichung in den nicht gestrichenen Koordinaten definiert.

- Nach dem Anwenden der Matrix $\mathbf{A}$ müssen wir die Koordinaten des resultierenden Vektors wieder in die gestrichene Basis transformieren, da wir die Differentialgleichung ja bezüglich der Eigenbasis darstellen wollen. Dies geschieht mit der Matrix $\mathbf{S}^{-1}$.

Die Differentialgleichung sieht bezüglich der Eigenbasis nun folgendermaßen aus:

$$\frac{d\mathbf{x}'}{dt} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{x}$$

Die Matrix $\mathbf{S}$ ist die Matrix mit den Eigenvektoren in ihren Spalten, daher gilt:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Nun können wir also die Differentialgleichung nach den gestrichenen Koordinaten umschreiben:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}'}{dt} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{x} &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -3\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 9 & \end{pmatrix}\mathbf{x} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis sollte uns im Grunde wenig überraschen, wenn wir die Jordansche Normalform kennen, die besagt, dass eine Matrix $\mathbf{A}$ folgendermaßen dargestellt werden kann:

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{J}\mathbf{S}^{-1},$$

wobei $\mathbf{S}$ die Matrix mit den Eigenvektoren in ihren Spalten ist, und $\mathbf{J}$ eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten der Matrix $\mathbf{A}$ in ihren Diagonalelementen. Somit haben wir unser Differentialgleichungssystem entkoppelt und können die Gleichungen nun zeilenweise lösen:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1'}{dt} &= 2x_1' \Rightarrow x_1'(t) = e^{2t}x_1'(0) \\ \frac{dx_2'}{dt} &= x_2' \Rightarrow x_2'(t) = e^{t}x_2'(0)\end{aligned}$$

d) Um dieses Beispiel lösen zu können, müssen wir erst wissen wie der Ausdruck $e^{\mathbf{A}t}$ definiert ist:

$$e^{\mathbf{A}t} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!}$$

Nun haben wir jedoch gesehen, dass wir über $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$ eine Diagonalmatrix $\mathbf{J}$ erzeugen können. Das heißt aber:

$$\mathbf{J} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{J}\mathbf{S}^{-1}$$

Das heißt jedoch, dass wir $e^{\mathbf{A}t}$ folgendermaßen schreiben können:

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{S}\mathbf{J}\mathbf{S}^{-1})^k t^k}{k!}$$

Da aber gilt:

$$(\mathbf{SJS}^{-1})^k = \underbrace{\mathbf{SJS}^{-1}\mathbf{SJS}^{-1}\dots\mathbf{SJS}^{-1}}_{k \text{ mal}}$$

Können wir die jeweiligen Terme zusammenfassen und es ergibt sich:

$$(\mathbf{SJS}^{-1})^k = \mathbf{SJ}^k\mathbf{S}^{-1}$$

Daher lässt sich schreiben:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{SJ}^k\mathbf{S}^{-1}t^k}{k!} = \mathbf{S}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{J}^k t^k}{k!}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^k t^k}{k!} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_1^k t^k}{k!} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1} \\ &= \mathbf{S}\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^k t^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_2^k t^k}{k!} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1} \end{aligned}$$

Hier erkennen wir jedoch die Reihendarstellung der Exponentialfunktion:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k t^k}{k!} = e^{\lambda t}$$

Daher lässt sich schreiben:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{S}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}$$

Dies lässt sich nun durch einfaches Einsetzen der Matrizen $\mathbf{S}$ bzw. $\mathbf{S}^{-1}$, die wir ja weiter oben bereits berechnet haben, lösen:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{S}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \sqrt{2}e^{\lambda_1 t} \\ -\sqrt{2}e^{\lambda_2 t} & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + 2e^{\lambda_2 t} & \sqrt{2}e^{\lambda_1 t} - \sqrt{2}e^{\lambda_2 t} \\ \sqrt{2}e^{\lambda_1 t} - \sqrt{2}e^{\lambda_2 t} & 2e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit können wir $e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$ mit $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 1$ anschreiben als:

$$e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^{2t}\left(x_1(0) + \sqrt{2}x_2(0)\right) + \sqrt{2}e^{t}\left(\sqrt{2}x_1(0) - x_2(0)\right) \\ \sqrt{2}e^{2t}\left(x_1(0) + \sqrt{2}x_2(0)\right) - e^{t}\left(\sqrt{2}x_1(0) - x_2(0)\right) \end{pmatrix}$$

Nun müssen wir noch überprüfen, ob dies tatsächlich dem Ausdruck $\mathbf{x}(t)$ entspricht. Weiter oben haben wir bereits die Differentialgleichung für das gestrichene System gelöst. Hierbei fanden wir:

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} e^{2t}x_1'(0) \\ e^{t}x_2'(0) \end{pmatrix}$$

Dieses Ergebnis müssen wir nun in die ungestrichenen Koordinaten transformieren. Hierfür dient die Matrix $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{S}\mathbf{x}'(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t}x_1'(0) \\ e^t x_2'(0) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} e^{2t}x_1'(0) - \sqrt{2}e^t x_2'(0) \\ \sqrt{2}e^{2t}x_1'(0) + e^t x_2'(0) \end{pmatrix}$$

Nun müssen wir noch den Anfangszustand $\mathbf{x}'(0)$ über die alten Koordinaten darstellen. Dies gelingt uns mit der Matrix $\mathbf{S}^{-1}$, da gilt:

$$\mathbf{x}'(0) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}(0) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1'(0) \\ x_2'(0) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} x_1(0) + \sqrt{2}x_2(0) \\ -\sqrt{2}x_1(0) + x_2(0) \end{pmatrix}$$

Setzen wir dieses Ergebnis in das oben errechnete Ergebnis für $\mathbf{x}(t)$ ein, so erkennt man sofort, dass gilt:

$$e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(t)$$

Somit haben wir das zu Zeigende bewiesen.