5. Tutorium

1 Tensoren

Die Komponenten eines kontravarianten Tensors zweiter Stufe A bezüglich der Standardbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ lauten

$$(a^{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Wie lauten die Komponenten a_{ij} bezüglich der dualen Basis zur Standardbasis?
b) Wie lauten die Komponenten a'^{ij} des Tensors A bezüglich der nicht-orthogonalen Basis $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ wobei die Basisvektoren durch

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

definiert sind?
c) Berechne die Basisvektoren $\mathbf{f}^i$ im dualen Raum.
d) Berechne die Elemente der metrischen Tensoren, g'_{ij} und g'^{ij}, für die nicht-orthogonale Basis.
e) Berechne die Komponenten $a'^{i}{}_{j}$ und a'^{j}_{i} in der gemischten Darstellung zwischen der nicht-orthogonalen Basis $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ und der dualen Basis $\{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2\}$.
f) Berechne die Komponenten des Tensors A^n (n: ganzzahliger Exponent) bezüglich der Standardbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

---

a) Wir können den Tensor folgendermaßen darstellen:

$$\mathbf{A} = a^{ij} \left|\mathbf{e}_i\right\rangle \left\langle\mathbf{e}_j\right|$$

Diese Darstellung ist im Grunde vollkommen analog zur Darstellung eines Vektors $\mathbf{x}$ mit gewissen Koordinaten x^i bezüglich einer Basis $\mathbf{e}_i$. Bei Tensoren heben wir gewissermaßen diese Darstellung um eine Dimension. Allgemein gilt, dass Indices, die kontrahieren (also über die summiert wird), diagonal zueinander stehen müssen, also beispielsweise $a^{ij} \left|\mathbf{e}_i\right\rangle \left\langle\mathbf{e}_j\right|$ und nicht $a_{ij} \left|\mathbf{e}_i\right\rangle \left\langle\mathbf{e}_j\right|$. Dieser Umstand wurde bei den ersten Übungen noch nicht beachtet, da wir ja den Dualraum noch nicht kannten und auch von Ko- bzw. Kontravarianz noch nichts wussten. Ein Tensor ist dabei wieder - in Analogie zu den Vektoren - ein grundsätzlich invariantes Objekt. Was sich ändert, sind lediglich die Koordinaten und die Basisvektoren. Nun wissen wir, dass wir mit Hilfe des metrischen Tensors (auch Maßtensor oder schlicht Metrik) die Basisvektoren zwischen Vektorraum und Dualraum hin und her transformieren, also den Index der jeweiligen Basis herunter- bzw. hinaufziehen können. Das heißt:

$$\mathbf{A} = a^{ij} \left|\mathbf{e}_i\right\rangle \left\langle\mathbf{e}_j\right| = a^{ij} \left|g_{ik}\mathbf{e}^k\right\rangle \left\langle g_{jl}\mathbf{e}^l\right|$$

Nun können wir die Komponenten des metrischen Tensors aus dem Tensorprodukt herausziehen, das heißt:

$$\mathbf{A} = a^{ij} g_{ik} g_{jl} \left|\mathbf{e}^k\right\rangle \left\langle\mathbf{e}^l\right|$$

Da wir uns in der Standardbasis befinden, ist die Metrik aber schlicht das Kronecker-Delta, womit wir schreiben können:

$$\mathbf{A} = a^{ij} \delta_{ik} \delta_{jl} \left|\mathbf{e}^k\right\rangle \left\langle\mathbf{e}^l\right| = a_{kl} \left|\mathbf{e}^k\right\rangle \left\langle\mathbf{e}^l\right|$$

Da wir aber wissen, dass die kovariante Darstellung des Tensors die Form $a_{ij} \left|\mathbf{e}^i\right\rangle \left\langle\mathbf{e}^j\right|$ besitzen muss, erkennen wir, dass die Komponenten a_{ij} der kovarianten Darstellung genau denen der Kontravarianten entspricht.

b) Zuerst sind wir daran interessiert, eine Transformation von der neuen Basis in die uns bekannte alte Basis zu finden. Da die Transformation von der alten in die neue Basis gegeben ist, gilt:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & -2 \\ -1 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & -2 \\ -1 & 3\end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix}\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2\end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix}3 & 2 \\ 1 & 1\end{pmatrix}}_{=:\mathbf{S}}\end{aligned}$$

Nun können wir wieder gleich argumentieren, wie schon im ersten Beispiel: Der Tensor ist (wie bereits oben) folgendermaßen darstellbar:

$$\mathbf{A} = a^{ij} \left|\mathbf{e}_i\right\rangle \left\langle\mathbf{e}_j\right|$$

Nun kennen wir jedoch die soeben bestimmte Transformationsmatrix zwischen den beiden Basen, und können daher schreiben:

$$\mathbf{A} = a^{ij} \left|\mathbf{e}_i\right\rangle \left\langle\mathbf{e}_j\right| = a^{ij} \left|\mathbf{f}_k s^k{}_i\right\rangle \left\langle\mathbf{f}_l s^l{}_j\right| = s^k{}_i a^{ij} s^l{}_j \left|\mathbf{f}_k\right\rangle \left\langle\mathbf{f}_l\right|$$

Somit haben wir den Tensor bezüglich der neuen Basis dargestellt und wissen nun, dass die neuen Koordinaten des Tensors gegeben sind über

$$\begin{aligned}(a'^{ij}) = \mathbf{S}(a^{ij})\mathbf{S}^T &= \begin{pmatrix}3 & 2 \\ 1 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-1 & -2 \\ 3 & 4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3 & 1 \\ 2 & 1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}3 & 2 \\ 1 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-7 & -3 \\ 17 & 7\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}13 & 5 \\ 10 & 4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

c) Um die dualen Basisvektoren zu berechnen, erinnern wir uns, dass gilt:

$$\mathbf{f}^i\mathbf{f}_j = \delta^i{}_j \Rightarrow \begin{pmatrix}\mathbf{f}^1\\ \mathbf{f}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2\end{pmatrix} = \mathbf{I} \Rightarrow \begin{pmatrix}\mathbf{f}^1\\ \mathbf{f}^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2\end{pmatrix}^{-1}$$

Nun können wir jedoch die neue Basis bezüglich der alten über die Transformationsmatrix $\mathbf{S}^{-1} =: \mathbf{T}$ darstellen, und es gilt somit:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{f}^1\\ \mathbf{f}^2\end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{pmatrix}\mathbf{T}\right)^{-1} = \mathbf{T}^{-1}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{pmatrix}^{-1} = \mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{e}^1\\ \mathbf{e}^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{e}^1\\ \mathbf{e}^2\end{pmatrix}$$

Somit lassen sich die neuen dualen Basisvektoren einfach anschreiben:

$$\mathbf{f}^1 = 3\mathbf{e}^1 + 2\mathbf{e}^2$$
$$\mathbf{f}^2 = \mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^2$$

Anhand dieses Beispiels sehen wir auch wieder (wie schon beim letzten Tutorium), dass für eine Transformation von einer orthonormalen auf eine beliebige andere Basis die dualen Basisvektoren genau invers zu den Basisvektoren im Vektorraum transformieren. In anderen Worten: sie transformieren so, wie die Koordinaten der Vektoren im Vektorraum.

d) Die Komponenten des metrischen Tensors berechnen sich über das Skalarprodukt der Basisvektoren mit dem jeweiligen Zeilen- bzw. Spaltenindex:

$$(g'_{ij}) = (\mathbf{f}_i\mathbf{f}_j) = (\mathbf{e}_k t^k{}_i \mathbf{e}_l t^l{}_j) = (t^k{}_i \mathbf{e}_k\mathbf{e}_l t^l{}_j) = (t^k{}_i \delta^k{}_l t^l{}_j) = \mathbf{T}^T\mathbf{T}$$

wobei $\mathbf{T}$ wie schon vorher die Transformationsmatrix von den alten auf die neuen Koordinaten ist. Das heißt:

$$(g'_{ij}) = \begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -5\\ -5 & 13\end{pmatrix}$$

Analog gehen wir für die dualen Basisvektoren vor:

$$(g'^{ij}) = (\mathbf{f}^i\mathbf{f}^j) = (s^i{}_k \mathbf{e}^k s^j{}_l \mathbf{e}^l) = (s^i{}_k \mathbf{e}_k\mathbf{e}_l s^j{}_l) = (s^i{}_k \delta_{kl} s^j{}_l) = \mathbf{S}\mathbf{S}^T$$

Die Matrix $\mathbf{S}$ ist dabei die Transformationsmatrix von der neuen in die alte Basis. Somit folgt:

$$(g'^{ij}) = \begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13 & 5\\ 5 & 2\end{pmatrix}$$

e) In diesem Beispiel nutzen wir geschickt die Definitionsgleichung der Metrik aus, indem wir die Darstellung des Tensors $\mathbf{A}$ bezüglich der neuen Basis auf geschickte Art und Weise mit der Einheitsmatrix multiplizieren. Der Tensor $\mathbf{A}$ ist folgendermaßen darstellbar:

$$\mathbf{A} = a'^{ij}\,|\mathbf{f}_i\rangle\langle\mathbf{f}_j|$$

Aufgrund der Definitionsgleichung für die duale Basis wissen wir auch, dass

$$|\mathbf{f}_k\rangle\langle\mathbf{f}^k| = \mathbf{I}$$

wobei $\mathbf{I}$ die Einheitsmatrix bezeichnet.

ies können wir nun auf die obige Darstellung des Tensors **A** multiplizieren, ohne dass dies den Tensor verändern wird, weil es sich ja um die Einheitsmatrix handelt:

$$\mathbf{A} = a'^{ij} \left|\mathbf{f}_i\right\rangle \underbrace{\left\langle \mathbf{f}_j \middle| \mathbf{f}_k \right\rangle}_{=g'_{jk}} \left\langle \mathbf{f}^k \right|$$

Nun erkennen wir aber, dass sich in der Mitte die Definitionsgleichung für die Metrik g'_{jk} ergibt, sodass wir schreiben können:

$$\mathbf{A} = a'^{ij} g'_{jk} \left|\mathbf{f}_i\right\rangle \left\langle \mathbf{f}^k \right|$$

Damit aber die Indices richtig miteinander kontrahieren (wir haben ja bereits festgestellt, dass die gesättigten Indices immer diagonal zueinander stehen müssen), muss gelten:

$$(a'^i{}_k) = (a'^{ij})\mathbf{g}' = \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Auf analoge Art und Weise gehen wir auch für die andere gemischte Darstellung vor:

$$\mathbf{A} = a'^{ij} \left|\mathbf{f}_i\right\rangle \left\langle \mathbf{f}_j \right| = a'^{ij} \left|\mathbf{f}^k\right\rangle \underbrace{\left\langle \mathbf{f}_k \middle| \mathbf{f}_i \right\rangle}_{=g'_{ki}} \left\langle \mathbf{f}_j \right| = g'_{ki} a'^{ij} \left|\mathbf{f}^k\right\rangle \left\langle \mathbf{f}_j \right|$$

Hieraus folgt:

$$(a'_k{}^j) = \mathbf{g}'(a'^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 & -10 \\ 65 & 27 \end{pmatrix}$$

f) Im letzten Teilbeispiel nutzen wir den Umstand aus, dass wir eine Darstellung des Tensors gefunden haben, die nur Diagonaleinträge aufweist, und zwar die gemischte Darstellung $(a'^i{}_j)$. Für diese gilt:

$$(a'^i{}_j)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Der Tensor ist nun noch bezüglich der falschen Basis dargestellt. Um ihn in die Standardbasis zu transformieren, verwenden wir wieder schon bekannte Tricks. Wir erinnern uns, dass gilt:

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_k t^k{}_i$$
$$\mathbf{f}^j = s^j{}_l \mathbf{e}^l$$

Dies können wir nun für das Transformieren des Tensors verwenden:

$$\mathbf{A}^n = (a'^i{}_j)^n \left|\mathbf{f}_i\right\rangle \left\langle \mathbf{f}^j \right| = (a'^i{}_j)^n \left|\mathbf{e}_k t^k{}_i\right\rangle \left\langle s^j{}_l \mathbf{e}_l \right| = t^k{}_i (a'^i{}_j)^n s^j{}_l \left|\mathbf{e}_k\right\rangle \left\langle \mathbf{e}^l \right|$$

Und da $\mathbf{e}^l = \mathbf{e}_m \delta^{ml}$ können wir schreiben:

$$\mathbf{A}^n = t^k{}_i (a'^i{}_j)^n s^j{}_m \left|\mathbf{e}_k\right\rangle \left\langle \mathbf{e}_m \right|$$

Und somit können wir ablesen, dass bezüglich der Standardbasis gilt:

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{T}(a'^i{}_j)^n \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2^{n+1} & 2(1-2^n) \\ 3(2^n - 1) & 3 \cdot 2^n - 2 \end{pmatrix}$$

2 Lokale Transformation

Betrachte eine Transformation zwischen kartesischen Koordinaten $(x^1, x^2) = (x, y)$ und elliptischen Koordinaten $(x'^1, x'^2) = (u, v)$, die durch

$$x^1 = x(u,v) = \cosh u \, \cos v, \;\; x^2 = y(u,v) = \sinh u \, \sin v \qquad (0 \le u < \infty \, , \, 0 \le v \le 2\pi)$$

definiert ist. Im elliptischen Koordinatensystem sind die Basisvektoren lokal definiert, d.h. die Richtung und Länge der Basisvektoren sind ortsabhängig.

a) Die infinitesimale Änderung $\mathbf{dx} = dx^i \mathbf{e}_i$ im kartesischen Koordinatensystem wird im elliptischen Koordinatensystem mit $\mathbf{dx} = dx'^i \mathbf{e}'_i$ dargestellt. Berechne die Transformationsmatrix $\mathbf{S}$ der Basisvektoren, wobei

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \mathbf{S}$$

($\mathbf{e}_i$ und $\mathbf{e}'_i$ seien Spaltenvektoren.)

b) Zeichne in der xy-Ebene eine Kurve C_1 mit $u = \ln 2$ und $0 \le v \le 2\pi$ und eine andere C_2 mit $0 \le u < \infty$ und $v = \pi/4$. Skizziere auch die Basisvektoren $\mathbf{e}'_1$ und $\mathbf{e}'_2$ auf dem Schnittpunkt $(u, v) = (\ln 2, \pi/4)$.

c) Berechne die Elemente der metrischen Tensoren, g'_{ij} und g'^{ij}, der elliptischen Koordinaten.

d) Zeige dass die Umfangslänge L der Kurve C_1 durch

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{9}{16} + \sin^2 v} \, dv$$

gegeben ist.

---

a) Die Überlegungen für eine lokale Transformation sind im Grunde genau die selben wie für eine globale Transformation, wie wir sie schon des öfteren bei Basis- bzw. Koordinatentransformationen hatten. Auch der infinitesimale Vektor $\mathbf{dx}$ ist eine Größe, die lokal invariant ist, das heißt, die an jedem Punkt über gewisse Koordinaten bezüglich einer gewissen Basis dargestellt werden kann, die jedoch gemeinsam immer dasselbe Objekt beschreiben. Somit gilt:

$$\mathbf{dx} = dx^i \mathbf{e}_i = dx'^i \mathbf{e}'_i$$

Da es sich bei dx^i allerdings um ein totales Differential handelt, können wir dieses schreiben als

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^i} dx'^i$$

Setzen wir dies in die obere Gleichung ein, so ergibt sich:

$$\mathbf{dx} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^i} dx'^i \mathbf{e}_i = dx'^i \frac{\partial x^i}{\partial x'^i} \mathbf{e}_i = dx'^i \mathbf{e}'_i$$

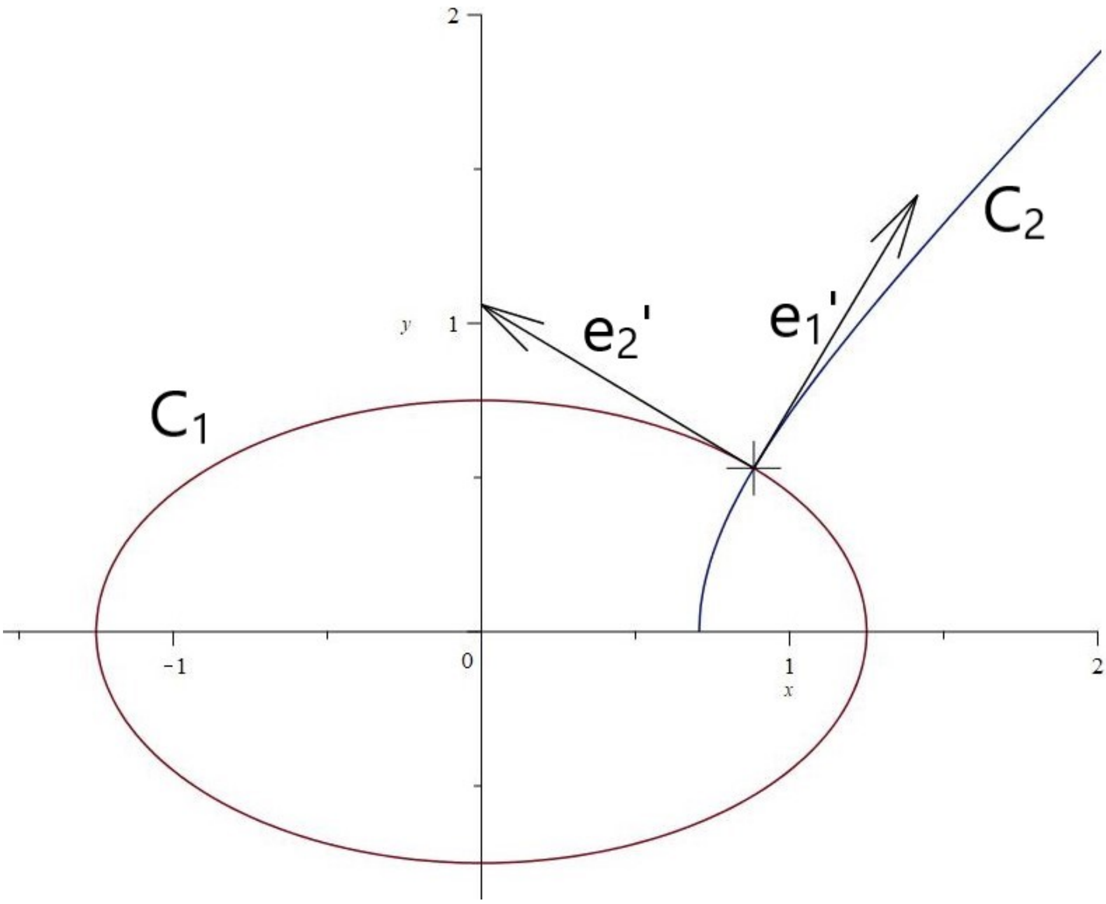
Durch einen Koeffizientenvergleich lässt sich nun aber leicht die Transformation von den alten auf die neuen Basiselemente bestimmen:

$$\mathbf{e}'_i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^i} \mathbf{e}_i$$

Dieses Ergebnis sollte uns auch nicht überraschen, da es sich bei $\frac{\partial x^i}{\partial x'^i}$ um nichts anderes handelt als die Jacobi-Matrix, die ja bereits in Praktischer Mathematik bei Basistransformationen verwendet wurde. Wir berechnen nun diese Transformationsmatrix:

$$\frac{\partial x^i}{\partial x'^i} = \mathbf{S} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \sinh u \cos v & -\cosh u \sin v \\ \cosh u \sin v & \sinh u \cos v \end{pmatrix}$$

b) Lässt man sich die gefragten Figuren plotten, so ergibt sich folgendes Bild:



Die Graphik lässt bereits erahnen, dass die gestrichenen Basiselemente stets orthogonal sind, was uns im nächsten Teilbeispiel helfen wird.

Wie bereits erwähnt, können wir zeigen, dass die Matrix $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix}$ orthogonal ist:

$$\mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}'_2 = -\sinh u \cos v \cosh u \sin v + \cosh u \sin v \sinh u \cos v = 0$$

Wir können diese also normieren, was uns nachher einiges an Rechenarbeit ersparen wird.

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}'_1 &= \sinh^2 u \cos^2 v + \cosh^2 u \sin^2 v \\
&= \sinh^2 u - \sinh^2 u \sin^2 v + \cosh^2 u \sin^2 v \\
&= \sinh^2 u + \sin^2 v \\
\mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}'_2 &= \cosh^2 u \sin^2 v + \sinh^2 u \cos^2 v \\
&= \mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}'_1 = \sinh^2 u + \sin^2 v
\end{aligned}$$

Nun können wir folgenden Trick anwenden: Wir multiplizieren die Matrix $\mathbf{S}$ mit $1 = \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{N}}$, wobei $\mathcal{N}$ die eben gefundene Norm der jeweiligen Spalten von $\mathbf{S}$ bezeichnet (hier müssen wir beachten, dass $\mathcal{N}$ die Wurzel aus den obigen Skalarprodukten ist):

$$\mathbf{S} = \underbrace{\frac{1}{\mathcal{N}}\mathbf{S}}_{=:\mathbf{Q}}\mathcal{N}$$

Wichtig ist nun, dass die so definierte Matrix $\mathbf{Q}$ orthonormal ist, das heißt: $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$. Wie wir bereits im ersten Beispiel gesehen haben, berechnet sich nun die Metrik wie folgt:

$$\mathbf{g}'(\mathbf{e}'_i \mathbf{e}'_j) = \mathcal{N}^2 \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = (\sinh^2 u + \sin^2 v) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nun können wir die Metrik aber schlicht durch Invertieren in der dualen Basis darstellen, wobei uns das sehr leicht fällt, da die Inverse einer Diagonalmatrix schlicht durch Invertieren der Diagonalelemente erfolgt, d.h.:

$$\mathbf{g}'^* = \frac{1}{\sinh^2 u + \sin^2 v} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Die Länge der Kurve C_1 (das heißt der Umfang der Ellipse) berechnet sich als Integral über die Norm des Vektorelementes für konstantes $u = \ln 2$. Dann können wir schreiben:

$$\begin{aligned}
\oint_{C_1} |d\mathbf{x}|_{u=\ln 2} &= \oint_{C_1} \left| \underbrace{dx'^1}_{=0} \mathbf{e}'_1 + dx'^2 \mathbf{e}'_2 \right|_{u=\ln 2} = \int_0^{2\pi} |\mathbf{e}'_2|_{u=\ln 2} \, dv \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}\Big|_{u=\ln 2} dv = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{9}{16} + \sin^2 v} \, dv
\end{aligned}$$

Hiermit ist die Aussage aus der Angabe bewiesen.