Mathematische Methoden der Theoretischen Physik (UE, 135.044)

1. Test, 20. 11. 2020, 2020W

Schreiben Sie auf allen Zetteln Name und Matrikelnummer und auf dem ersten Zettel Name, Matrikelnummer, zwei ausgewählte Fragen (z.B. Bsp.1a und Bsp.2d) und Zahl der abgegebenen Blätter darauf. (Der Test wird nicht bewertet wenn keine ausgewählten Fragen oder mehr als zwei Beispiele angegeben sind.)

Bsp.1 (25 Punkte)

Beantworten Sie eine der folgenden zwei Fragen.

a) Zeigen Sie in Indexschreibweise, dass für dreidimensionale Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ gilt

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 + |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 \,.$$

(Schreiben Sie explizit an, in welcher Basis Sie die Vektoren darstellen.)

b) Berechnen Sie die Transformationsmatrix $\mathbf{S}$ und die zugehörigen metrischen Tensoren $\mathbf{g}' = (g'_{ij})$ und $\mathbf{g}'^{*} = (g'^{ij})$ für eine lokale Transformation $dx^i\mathbf{e}_i = dx'^i\mathbf{e}'_i$ zwischen der Standardbasis $\mathbf{e}_i$ und der ortsabhängigen Basis $\mathbf{e}'_i$ des Kugelkoordinatensystems, wobei die Transformationsmatrix durch

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}\mathbf{S}$$

definiert ist. Die Beziehung zwischen den kartesischen Koordinaten $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$ und den Kugelkoordinaten $(x'^1, x'^2, x'^3) = (r, \theta, \phi)$ ist durch $(x, y, z) = (r\sin\theta\cos\phi,$ $r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$ gegeben.

Bsp.2 (25 Punkte)

Beantworten Sie eine der folgenden zwei Fragen.

c) Der kontravariante Tensor zweiter Stufe $\mathbf{A}$ bezüglich der Standardbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ ist durch

$$\mathbf{A} = 3\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2$$

gegeben. Berechnen Sie die Komponenten a'^{ij}, a'_{ij}, $a'^{i}{}_{j}$ und $a'_{i}{}^{j}$ des Tensors A bezüglich der Basis $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\} = \{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2, 2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\}$ und der dualen Basis $\{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2\}$.

d) Die Komponenten eines kontravarianten Tensors zweiter Stufe $\mathbf{A}$ bezüglich der Standardbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ lauten

$$\begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} \\ a^{21} & a^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wie lauten die Komponenten des kontravarianten Tensors $\mathbf{A}^n$ (n: ganzzahliger Exponent) bezüglich der Standardbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$?