1. Test - Lösungen **20.11.2020**

a)[25] Da die Identität unabhängig von Basis ist, wird sie mit der Standardbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ bewiesen. ($\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ und $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}^k$)

$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 + |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2 = (a^i\mathbf{e}_i \cdot b^j\mathbf{e}_j)(a^k\mathbf{e}_k \cdot b^\ell\mathbf{e}_\ell) + (a^i\mathbf{e}_i \times b^j\mathbf{e}_j)\cdot(a^k\mathbf{e}_k \times b^\ell\mathbf{e}_\ell)$
$= a^ib^j\delta_{ij}a^kb^\ell\delta_{k\ell} + (\varepsilon_{ijm}a^ib^j\mathbf{e}^m)\cdot(\varepsilon_{k\ell n}a^kb^\ell\mathbf{e}^n) = a^ib^ia^kb^k + \varepsilon_{ijm}\varepsilon_{k\ell n}a^ib^ja^kb^\ell\delta^{mn}$
$= a^ib^ia^kb^k + \varepsilon_{ijm}\varepsilon_{k\ell m}a^ib^ja^kb^\ell = a^ib^ia^kb^k + (\delta_{ik}\delta_{j\ell} - \delta_{i\ell}\delta_{jk})a^ib^ja^kb^\ell$
$= a^ib^ia^kb^k + a^ib^ja^ib^j - a^ib^ja^jb^i = a^ib^ja^ib^j = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2$

b)[25]
Transformation der Basis: $\mathbf{dx} = dx^i\mathbf{e}_i = dx'^j(\partial'_jx^i)\mathbf{e}_i = dx'^j\mathbf{e}'_j \to \mathbf{e}'_j = \partial'_jx^i\mathbf{e}_i \quad (\partial'_jx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j})$

$$\mathbf{S} = (s^i{}_j) = (\partial'_jx^i) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

Metrische Tensoren :

$$\mathbf{g'} = \mathbf{S}^T\mathbf{S} \text{ (oder } g'_{ij} = \mathbf{e}'_i\cdot\mathbf{e}'_j) \to \mathbf{g'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}, \mathbf{g'^*} = \mathbf{g'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(r^2\sin^2\theta) \end{pmatrix}$$

c) [25]

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}\mathbf{S}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix}\mathbf{T}$$

$\mathbf{A} = a^{ij}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j = a^{ij}t^k{}_i\mathbf{f}_k\otimes t^\ell{}_j\mathbf{f}_\ell = t^k{}_ia^{ij}t^\ell{}_j\mathbf{f}_k\otimes\mathbf{f}_\ell \equiv a'^{k\ell}\mathbf{f}_k\otimes\mathbf{f}_\ell$

$$(a'^{ij}) = \mathbf{T}(a^{ij})\mathbf{T}^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung 1

Metrischer Tensor : $\mathbf{g} = (\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{f}_j) = \mathbf{S}^T\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$$(a'^i{}_j) = (a'^{ik})\mathbf{g} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (a'_i{}^j) = \mathbf{g}(a'^{kj}) = \begin{pmatrix} -19 & 12 \\ -30 & 19 \end{pmatrix}, (a'_{ij}) = \mathbf{g}(a'^k{}_j) = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Lösung 2

In der Standardbasis, $a^{ij} = a^i{}_j = a_i{}^j = a_{ij}$

$$(a'^i{}_j) = \mathbf{T}(a^i{}_j)\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (a'_i{}^j) = \mathbf{S}^T(a_i{}^j)\mathbf{T}^T = \begin{pmatrix} -19 & 12 \\ -30 & 19 \end{pmatrix},$$

$$(a'_{ij}) = \mathbf{S}^T(a_{ij})\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

d)
Säkulardeterminante :

$$\det(a^{ij} - \lambda\delta^{ij}) = \det\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda-3)(\lambda+1) = 0$$

$\to$ Eigenwerte : $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$

Eigenvektoren $\mathbf{f} = (1, a)$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2a \\ -2+a \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 3 \to a = -1 \to \mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = -1 \to a = 1 \to \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($c\mathbf{f}_i$ ($c \neq 0$) sind auch die Eigenvektoren.)

Lösung 1

Projektor : $\mathbf{E}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{E}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Spektraltheorem : $\mathbf{A} = 3\mathbf{E_1} - \mathbf{E}_2$ (oder $= 3\mathbf{f}_1\otimes\mathbf{f}^1 - \mathbf{f}_2\otimes\mathbf{f}^2$.)

Orthogonalität : $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 = 0$, $\to \mathbf{A}^2 = (3\mathbf{E_1} - \mathbf{E}_2)^2 = 3^2\mathbf{E_1} + (-1)^2\mathbf{E}_2, \cdots, \mathbf{A}^n = 3^n\mathbf{E_1} + (-1)^n\mathbf{E}_2$.

In der Standardbasis

$\mathbf{A}^n \rightarrow 3^n \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^n \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + (-1)^n & -3^n + (-1)^n \\ -3^n + (-1)^n & 3^n + (-1)^n \end{pmatrix}$

Lösung 2

Oder Spektraltheorem in Matrixform $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{S} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{S}^{-1}$ wobei $\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_j s^j{}_i$ (Wenn $\mathbf{f}_i$ normiert ist, gilt $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^T$.)

$\mathbf{A}^2 \rightarrow \mathbf{S} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{S} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & (-1)^2 \end{pmatrix} \mathbf{S}^{-1}, \cdots,$

$\mathbf{A}^n \rightarrow \mathbf{S} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \mathbf{S}^{-1}$

In der Standardbasis

$\mathbf{A}^n \rightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + (-1)^n & -3^n + (-1)^n \\ -3^n + (-1)^n & 3^n + (-1)^n \end{pmatrix}$

Anmerkung : $\mathbf{A}$ ist ein Tensor und $(a^{ij}) = \mathbf{S} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & (-1) \end{pmatrix} \mathbf{S}^{-1}$ ist eine Matrix (oder eine Matrixdarstellung des Tensors).