Name: Tutoriumsgruppe: Matr. Nr.:

Anzahl der abgegebenen Blätter (inkl. Deckblatt):

Mathematische Methoden der Theoretischen Physik (UE, 135.044)

2. Test, 22. 1. 2021, 2020/21W

1 Rechenbeispiele I (16 Punkte)

a) Berechnen Sie $\nabla \cdot (r\mathbf{f}_r) = \nabla \cdot (x'^1 \mathbf{f}_1)$.
Hinweis : Die Kugel-Koordinaten sind durch $(x, y, z) = (r \sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$ und die zugehörige lokale Transformation durch $dx^i\mathbf{e}_i = dx'^i\mathbf{f}_i$ definiert.

b) Der metrische Tensor einer nicht-orthogonalen Basis $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ ist durch $\mathbf{g} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ gegeben. Berechnen Sie die Fläche des von $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ aufgespannten Parallelogramms.

c) Berechnen Sie $\frac{\Gamma(n/2+1)}{\Gamma(n/2)}$

d) Nehmen Sie an, dass das Volumen einer 4-dimensionalen Kugel mit Radius R durch $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(R^2 - x^2 - y^2 - z^2 - w^2)dxdydzdw = aR^4$ (a: Konstante, $H(t)$: Heaviside-Funktion) gegeben ist. Berechnen Sie für die Delta-Distribution $\delta(t)$ das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(R^2 - x^2 - y^2 - z^2 - w^2)dxdydzdw\,.$$

2 Rechenbeispiele II (18 Punkte)

a) Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2 ($|\lambda_1| < |\lambda_2|$) der Matrix A^n wobei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

c) Berechnen Sie $\int_0^\infty af'(x)\cos x dx$ mit $f(x) = \begin{cases} \cos x & (|x| \le \pi) \\ 0 & (|x| > \pi) \end{cases}$

d) $y_n(x)$ ist die Lösung der Eigenwertgleichung $(1 - x^2)y_n''(x) - (2a + 1)xy_n'(x) + \lambda_n y_n(x) = 0$ $(-1 \le x \le 1)$ mit dem Eigenwert $\lambda_n = n(n+2a)$. Die Eigenfunktionen sind orthogonal wenn das Skalarprodukt durch $\langle y_n|y_m\rangle = \int_{-1}^{1} w(x)y_n(x)y_m(x)dx$ definiert ist. Schreiben Sie die Gewichtsfunktion $w(x)$ an. (Randbedingung : $w(0) = 1$)

---

3 Greensche Funktion (26 Punkte)

Ein Differentialoperator $\mathcal{L}_t$ ist durch $\mathcal{L}_t y(t) = \left(\frac{d}{dt} - i\right)\left(\frac{d}{dt} - 8i\right) y(t)$ definiert.

a) Finden Sie die Fouriertransformation $\tilde{G}(\omega)$ einer Greenschen Funktion $G(t, t')$, die die inhomogene Differentialgleichung $\mathcal{L}_t G(t, t') = \delta(t - t')$ erfüllt.

b) Berechnen Sie den Cauchyschen Hauptwert der inversen Fouriertransformation $G_P(t - t') = \frac{1}{2\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\omega) e^{i\omega(t-t')} d\omega$. Beschreiben Sie auch, wie der Cauchysche Hauptwert gerechnet werden kann.

4 Differentialgleichung (40 Punkte)

a) Die Koordinaten (u, v) $(u \geq 1, -1 \leq v < 1)$ sind durch $(x, y) = (uv, \sqrt{(u^2 - 1)(1 - v^2)})$ definiert, wobei (x, y) kartesische Koordinaten sind. Zeigen Sie, dass der Laplace-Operator in den Koordinaten (u, v) durch

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{x}) = \frac{\sqrt{u^2 - 1}}{u^2 - v^2} \partial_u \left(\sqrt{u^2 - 1}\, \partial_u \psi(\mathbf{x})\right) + \frac{\sqrt{1 - v^2}}{u^2 - v^2} \partial_v \left(\sqrt{1 - v^2}\, \partial_v \psi(\mathbf{x})\right)$$

gegeben wird.
Hinweis :

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \partial_i (V \partial^i \psi(\mathbf{x}))$$

mit

$$V = \sqrt{\det(\mathbf{g})}$$

b) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung $(\nabla^2 - E)\psi(\mathbf{x}) = 0$ in 2-Dimensionen auf die gewöhnlichen Differentialgleichungen $(u^2 - 1)\partial_u^2 P(u) + u\partial_u P(u) - Eu^2 P(u) = ZP(u)$ und $(1 - v^2)\partial_v^2 Q(v) - v\partial_v Q(v) + Ev^2 Q(v) = -ZQ(v)$ führt (E, Z: Konstante).

c) Verwenden Sie den Ansatz $Q(v) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n v^{n+\sigma}$ $(a_0 \neq 0)$ und bestimmen Sie den charakteristischen Exponent σ und die Rekursionsgleichung für a_n der Differentialgleichung in der v-Koordinate aus (b) mit $E = 0$ und $Z = m^2$.

d) Finden Sie eine Lösung $Q_2(v)$ der Differentialgleichung für $m = m_1$ und eine Lösung $Q_5(v)$ für $m = m_2$. ($Q_m(v)$ sei ein Polynom mit endlichen Graden.)
