2. Test - Lösungen **22.1.2021**

Bsp.1

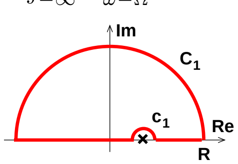
(zufälliger Reihenfolge beim Online-Quiz)
a) $r\mathbf{f}_r = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z = x^i\mathbf{e}_i \to \nabla x'^1\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}^i\partial_i x^j\mathbf{e}_j = \mathbf{e}^i\delta_i^j\mathbf{e}_j = \mathbf{e}^i\cdot\mathbf{e}_i = 3$
b) $\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_j s_i^j$, Fläche : $\det(\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2) = \det\mathbf{S}$ wobei $\mathbf{g} = \mathbf{S}^T\mathbf{S} \to \det\mathbf{S} = \sqrt{\det\mathbf{g}}$
c) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \to \Gamma(x+1)/\Gamma(x) = x$
d) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(X - x^2 - y^2 - z^2 - w^2)dxdydzdw$
$= \frac{d}{dX}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}H(X - x^2 - y^2 - z^2 - w^2)dxdydzdw = \frac{d}{dX}aX^2 = 2aX = 2aR^2$

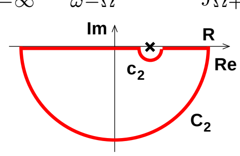
Bsp.2

a) Wenn die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ γ_1 und γ_2 sind, gilt $\mathbf{A} = \gamma_1\mathbf{E}_1 + \gamma_2\mathbf{E}_2$.
$\mathbf{A}^n = \gamma_1^n\mathbf{E}_1 + \gamma_2^n\mathbf{E}_2 \to$ Die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}^n$ sind γ_1^n und γ_2^n
b) $\int_0^\infty af'(x)\cos x dx = af(x)\cos x|_0^\infty + \int_0^\infty af(x)\sin x dx = -a + \int_0^\pi \cos x \sin x dx = -a$
oder
$f(x) = H(\pi + x)H(\pi - x)\cos x \to f'(x) = -\delta(\pi + x) + \delta(\pi - x) - H(\pi + x)H(\pi - x)\sin x$
$\int_0^\infty af'(x)\cos x dx = \int_0^\infty a\delta(\pi - x)\cos x dx - \int_0^\pi a \sin x \cos x dx = -a$
c) Die Sturm-Liouville'schen Gestalt:
$\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x) + \lambda\rho(x)\right)y(x) = 0 \to p(x)y''(x) + p'(x)y'(x) + q(x)y(x) + \lambda\rho(x)y(x) = 0$
Vergleich mit der Differentialgleichung in der Sturm-Liouville'schen Gestalt :
$p'(x)/p(x) = -(2a+1)x/(1-x^2)$, $q(x)/p(x) = 0$ und $\rho(x)/p(x) = 1/(1-x^2)$
$\to p(x) = (1-x^2)^{a+1/2}$, $\rho(x) = (1-x^2)^{a-1/2}$

Bsp.3 Greensche Funktion

a) $\mathcal{L}_t x(t) = \left(\frac{d}{dt} - i\Omega_1\right)\left(\frac{d}{dt} - i\Omega_2\right)x(t)$ $(\Omega_2 > \Omega_1)$
Fourierentwicklung : $G(t,t') = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{G}(\omega)\,e^{i\omega(t-t')}d\omega$
$\mathcal{L}_t G(t,t') = \delta(t-t') \to \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(i\omega - i\Omega_1)(i\omega - i\Omega_2)\tilde{G}(\omega)\,e^{i\omega(t-t')}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega(t-t')}d\omega$
Vergleich der Integranden: $\tilde{G}(\omega) = -\frac{1}{(\omega-\Omega_1)(\omega-\Omega_2)} = \frac{1}{\Omega_2-\Omega_1}\left(\frac{1}{\omega-\Omega_1} - \frac{1}{\omega-\Omega_2}\right)$
b)
$G_P(t,t') = \mathcal{P}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{G}(\omega)e^{i\omega(t-t')}d\omega = \frac{1}{2\pi(\Omega_2-\Omega_1)}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-\Omega_1}d\omega - \frac{1}{2\pi(\Omega_2-\Omega_1)}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-\Omega_2}d\omega$
Hier wird mithilfe des Konturintegrals (siehe Abb.) der Hauptwert
$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-\Omega}d\omega = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\int_{-\infty}^{\Omega-\epsilon}\frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-\Omega}d\omega + \int_{\Omega+\epsilon}^{\infty}\frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-\Omega}d\omega\right]$ gerechnet.





- Wenn $t > t'$, $C_1 = \{z = Re^{i\theta}|0 < \theta < \pi\}$, $c_1 = \{r = \Omega + re^{i\theta}|0 < \theta < \pi\}$
  und $C_{01} = C_1 + c_1 + \{x| - R < x < \Omega - r\} + \{x|\Omega + r < x < R\}$
  $\int_{C_1}\frac{e^{i\omega(t-t')}}{z-\Omega}dz = \int_0^\pi \frac{e^{iR(t-t')\cos\theta - R(t-t')\sin\theta}}{Re^{i\theta}-\Omega}iRe^{i\theta}d\theta$
  Da $(t-t')\sin\theta > 0$, convergiert im Limes $R\to\infty$, $\int_{C_1}\frac{e^{i\omega(t-t')}}{z-\Omega}dz \to 0$

$\int_{c_1} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{z-\Omega}dz = \int_0^\pi \frac{e^{i\Omega(t-t')+ire^{i\theta}(t-t')}}{re^{i\theta}} i\theta re^{i\theta}d\theta = \int_0^\pi e^{i\Omega(t-t')+ire^{i\theta}(t-t')}id\theta \xrightarrow{r\to 0} ie^{i\Omega(t-t')}\int_0^\pi d\theta = i\pi e^{i\Omega(t-t')}$

$\oint_{C_{01}} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{z-\Omega}dz = 0$

$\mathcal{P}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\omega(t-t')}}{z-\Omega}dz = \lim_{R\to\infty}\lim_{r\to 0}\left[\oint_{C_{01}} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{z-\Omega}dz - \oint_{C_1} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{z-\Omega}dz + \oint_{c_1} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{z-\Omega}dz\right] = i\pi e^{i\Omega(t-t')}$

- Wenn $t < t'$,

  in ähnlicher Weise, $\int_{C_2} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{z-\Omega}dz \xrightarrow{r\to\infty} 0$, $\int_{c_2} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{z-\Omega}dz \xrightarrow{r\to 0} i\pi e^{i\Omega(t-t')}$, $\oint_{C_{02}} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{z-\Omega}dz = 0$

  $\mathcal{P}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\omega(t-t')}}{z-\Omega}dz = \lim_{R\to\infty}\lim_{r\to 0}\left[-\oint_{C_{02}} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{z-\Omega}dz + \oint_{C_2} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{z-\Omega}dz - \oint_{c_2} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{z-\Omega}dz\right] = -i\pi e^{i\Omega(t-t')}$

Endlich,
$G_P(t,t') = \mathcal{P}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \tilde{G}(\omega)e^{i\omega(t-t')}d\omega = \frac{i}{2(\Omega_2-\Omega_1)}\left(H(t-t')(e^{i\Omega_1(t-t')} - e^{i\Omega_2(t-t')}) - H(t'-t)(e^{i\Omega_1(t-t')} - e^{i\Omega_2(t-t')})\right)$

Bsp.4 Differentialgleichung

a) elliptische Koordinaten : $(x^1, x^2) = (u, v, \phi)$, kartesische Koordinaten : $(x'^1, x'^2) = (x, y)$
wobei $x = uv$ und $y = \sqrt{(u^2-1)(1-v^2)}$ ($u \geq 1$ und $-1 \leq v < 1$)
$\mathbf{dx} = dx'^i\mathbf{e}_i = dx^j\partial_j x'^i\mathbf{e}_i \equiv dx^j\mathbf{f}_j$
$\mathbf{S} = (s^i{}_j) = (\partial_j x'^i) = \begin{pmatrix} v & u \\ u\sqrt{(1-v^2)/(u^2-1)} & -v\sqrt{(u^2-1)/(1-v^2)} \end{pmatrix}$
$g_{ij} = \mathbf{f}_i\cdot\mathbf{f}_j = \mathbf{e}_k s^k{}_i \cdot \mathbf{e}_\ell s^\ell{}_j = \delta_{k\ell}s^k{}_i s^\ell{}_j = s^k{}_i s^k{}_j = (u^2-v^2)\begin{pmatrix} (u^2-1)^{-1} & 0 \\ 0 & (1-v^2)^{-1} \end{pmatrix}$
$\to V = \sqrt{\det(\mathbf{g})} = \frac{u^2-v^2}{\sqrt{(u^2-1)(1-v^2)}}$ und $\mathbf{g}^* = \frac{1}{u^2-v^2}\begin{pmatrix} u^2-1 & 0 \\ 0 & 1-v^2 \end{pmatrix}$
$\nabla^2\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{V}\partial_i\left(V\partial^i\psi(\mathbf{x})\right) = \frac{1}{V}\partial_i\left(Vg^{ij}\partial_j\psi(\mathbf{x})\right)$
$= \frac{\sqrt{(u^2-1)(1-v^2)}}{u^2-v^2}\partial_u\left(\sqrt{\frac{u^2-1}{1-v^2}}\partial_u\psi(\mathbf{x})\right) + \frac{\sqrt{(u^2-1)(1-v^2)}}{u^2-v^2}\partial_v\left(\sqrt{\frac{1-v^2}{u^2-1}}\partial_v\psi(\mathbf{x})\right)$
$= \frac{1}{u^2-v^2}\left[(u^2-1)^{1/2}\partial_u\left((u^2-1)^{1/2}\partial_u\psi(\mathbf{x})\right) + (1-v^2)^{1/2}\partial_v\left((1-v^2)^{1/2}\partial_v\psi(\mathbf{x})\right)\right]$
b) $\mathcal{L}_u = (u^2-1)^{1/2}\partial_u(u^2-1)^{1/2}\partial_u$ und $\mathcal{L}_v = (1-v^2)^{1/2}\partial_v(1-v^2)^{1/2}\partial_v$
$\nabla^2\psi(\mathbf{x}) = E\psi(\mathbf{x})$
$\to \frac{1}{u^2-v^2}(\mathcal{L}_uP(u))Q(v) + \frac{1}{u^2-v^2}P(u)(\mathcal{L}_vQ(v)) = EP(u)Q(v)$
$\to \frac{1}{P(u)}(\mathcal{L}_uP(u)) + \frac{1}{Q(v)}(\mathcal{L}_vQ(v)) = E(u^2-v^2)$
$\to \frac{1}{P(u)}(\mathcal{L}_uP(u)) - Eu^2 = -\frac{1}{Q(v)}(\mathcal{L}_vQ(v)) - Ev^2$
Die Gleichung gilt für beliebige u, v nur wenn die beide Seiten konstant sind (unabhängig von u, v).
$\to \frac{1}{P(u)}(\mathcal{L}_uP(u)) - Eu^2 = -\frac{1}{Q(v)}(\mathcal{L}_vQ(v)) - Ev^2 = Z$
$\to \mathcal{L}_uP(u) - Eu^2P(u) = ZP(u)$ und $\mathcal{L}_vQ(v) + Ev^2Q(v) = -ZQ(v)$
$\to (u^2-1)P''(u) + uP'(u) - Eu^2P(u) = ZP(u)$ und $(1-v^2)Q''(v) - vQ'(v) + Ev^2Q(v) = -ZQ(v)$
c)
Wenn $E = 0$ und $Z = m^2$, $(1-v^2)Q''(v) - vQ'(v) + m^2Q(v) = 0$
Ansatz : $Q(v) = \sum_{n=0}^\infty a_nv^{n+\sigma}$
$\sum_{n=0}^\infty a_n(n+\sigma)(n+\sigma-1)v^{n+\sigma-2} - \sum_{n=0}^\infty a_n(n+\sigma)(n+\sigma-1)v^{n+\sigma} - \sum_{n=0}^\infty a_n(n+\sigma)v^{n+\sigma} + \sum_{n=0}^\infty m^2a_nv^{n+\sigma} = 0$
$\to \sum_{n=-2}^\infty a_{n+2}(n+\sigma+2)(n+\sigma+1)v^{n+\sigma} - \sum_{n=0}^\infty a_n((n+\sigma)^2-m^2)v^{n+\sigma} = 0$
Koeffizientenvergleich
$v^{\sigma-2}$-Term : $a_0\sigma(\sigma-1) = 0 \to \sigma = 0, 1$
$v^{\sigma-1}$-Term : $a_1(\sigma+1)\sigma = 0 \to \sigma = 0$ oder $a_1 = 0$
$v^{\sigma+n}$-Term ($n \geq 0$) : $a_{n+2} = \frac{(n+\sigma)^2-m^2}{(n+\sigma+2)(n+\sigma+1)}a_n$
d)

- Wenn $\sigma = 1$, $a_{n+2} = \frac{(n+1)^2-m^2}{(n+3)(n+2)}a_n$

  Da $a_1 = 0$, gilt $a_n = 0$ für ungerade n.

  Für umgerade m gilt $a_{m+1} = \frac{m^2-m^2}{(m+2)(m+1)}a_{m-1} = 0$ und $a_n = 0$ für $n \geq m+1$.

$\rightarrow Q(v)$ ist ein Polynom

$a_2 = \frac{1-m^2}{3!}a_0$, $a_4 = \frac{(9-m^2)(1-m^2)}{5!}a_0$, $a_6 = \frac{(25-m^2)(9-m^2)(1-m^2)}{7!}a_0$, $a_8 = \frac{(49-m^2)(25-m^2)(9-m^2)(1-m^2)}{9!}a_0$, $\ldots$

Für gerade m ist $Q(v)$ eine Potenzreihe mit unendlicher Summe.

- Wenn $\sigma = 0$, $a_{n+2} = \frac{n^2-m^2}{(n+2)(n+1)}a_n$

  Für gerade m gilt $a_{m+2} = \frac{m^2-m^2}{(m+2)(m+1)}a_m$ und $a_n = 0$ für gerade $n > m$.

  Mit Ersetzung $a_1 = 0$ gilt $a_n = 0$ für ungerade n.

  $\rightarrow Q(v)$ ist ein Polynom

  $a_2 = \frac{-m^2}{2!}a_0$, $a_4 = \frac{(4-m^2)(-m^2)}{4!}a_0$, $a_6 = \frac{(16-m^2)(4-m^2)(-m^2)}{6!}a_0$, $a_8 = \frac{(36-m^2)(16-m^2)(4-m^2)(-m^2)}{8!}a_0$,

  Für ungerade m bildet $Q(v)$ eine Potenzreihe mit unedlicher Summe wegen $a_0 \neq 0$.

$m = 0$: aus der Lösung mit $\sigma = 0$, $Q_0(v) = 1$ $(a_0 = 1)$
$m = 1$: aus der Lösung mit $\sigma = 1$, $Q_1(v) = x$ $(a_1 = 1)$
$m = 2$: aus der Lösung mit $\sigma = 0$, $Q_2(v) = 1 - 2x^2$
$m = 3$: aus der Lösung mit $\sigma = 1$, $Q_3(v) = x - \frac{4}{3}x^3$
$m = 4$: aus der Lösung mit $\sigma = 0$, $Q_4(v) = 1 - 8x^2 + 8x^4$
$m = 5$: aus der Lösung mit $\sigma = 1$, $Q_5(v) = x - 4x^3 + \frac{16}{5}x^5$
$m = 6$: aus der Lösung mit $\sigma = 0$, $Q_6(v) = 1 - 18x^2 + 48x^4 - 32x^6$