10. Tutorium **für 8.1.2021**

10.1 Gamma- und Beta-Funktionen

a) Leite, ausgehend vom Euler-Integral $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$, die Rekurrenzrelation $\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1)$ her und berechne $\Gamma(4)$ mit Hilfe der Rekurrenzrelation.
b) Berechne für positive Konstanten m, k, T das mittlere Quadrat der Geschwindigkeit $\bar{v^2} = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \int_{-\infty}^{\infty} v^2 e^{-mv^2/(2kT)} dv$ der Maxwell-Boltzmann-Verteilung.
Hinweis : $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
c) Berechne und vereinfache $e^{-a\pi}|\Gamma(1+ia)|^2$ (a: Konstante).
Hinweis : $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \pi/\sin(\pi x) = 2i\pi/(e^{i\pi x} - e^{-i\pi x})$
d) Berechne für gerade Ganzzahl das Integral $\int_0^{\pi/2} \cos^n \theta d\theta$ und schreibe das Ergebnis bzgl. der Doppelfakultät (ohne Gamma- und Beta-Funktionen).
Hinweise: $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$.

10.2 Sturm-Liouville-Problem II

a) Transformiere die Differentialgleichung $xy''(x) + (2-x)y'(x) = -\lambda y(x)$ ($x > 0$) in die Sturm-Liouville'sche Gestalt $\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x) + \lambda\rho(x)\right) y(x) = 0$.
b) Nimm einen Ansatz $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ für die Lösungen der Differentialgleichung $xy''(x) + (2-x)y'(x) = -\lambda y(x)$ an. Schreibe die Gleichung für die Koeffizienten, $\mathbf{a} = (a_0\ a_1\ a_2)^T$ in die Matrix-Vektorform $\mathbf{Ma} = -\lambda\mathbf{a}$ mit der 3×3 Matrix $\mathbf{M}$.
c) Berechne die Eigenwerte λ_i ($i = 1, 2, 3$) und die Eigenvektoren der Eigenwertgleichung aus (b) und schreibe die Eigenfunktionen $y_i(x)$ der Differentialgleichung.
d) Zeige, dass die Eigenfunktionen orthogonal sind, d.h.

$$\int_0^\infty y_i(x)y_j(x)\rho(x) = 0 \quad \text{wenn } i \neq j\,.$$

10.3 Greensche Funktion (III)

Betrachte eine inhomogene Differentialgleichung $\mathcal{L}_t y(t) = \delta(t - t')$ wobei der Operator $\mathcal{L}_t$ durch

$$\mathcal{L}_t y(t) = \left(\frac{d}{dt} + i\Omega\right)\left(\frac{d}{dt} - i\Omega\right) y(t)$$

definiert ist (Ω : reelle Konstante).
a) Finde eine Greensche Funktion $G_I(t, t')$, die die inhomogene Differentialgleichung erfüllt.
Hinweis: Falls die Pole, $\lambda_{1,2}$, der Fourier-transformierten Greenschen Funktion auf der reellen Achse liegen, verschiebe zuerst die Pole entlang der positiven imaginären Achse (d.h. $\lambda_{1,2}$ durch $\lambda_{1,2} + i\varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$) und berechne den Grenzwert $G_I^+(t, t') = \lim_{\varepsilon\to 0+} G_I(t, t')$.
b) Berechne die Greensche Funktion $G_I^-(t, t') = \lim_{\varepsilon\to 0-} G_I(t, t')$ mit einer negativen Verschiebung.
c) Überprüfe, dass $G_0(t, t') = G^+(t, t') - G^-(t, t')$ die homogene Differentialgleichung $\mathcal{L} G_0(t, t') = 0$ erfüllt.

Ankreuzbar: 1ab, 1cd, 2ab, 2cd, 3a-c