10. Tutorium - Lösungen **8.1.2021**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel anzuschauen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

10.1 Gamma- und Beta-Funktionen

a) $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt = \left(-t^{z-1}e^{-t}\right)_0^\infty + \int_0^\infty (z-1)t^{z-2}e^{-t}dt = (z-1)\int_0^\infty t^{z-2}e^{-t}dt = (z-1)\Gamma(z-1)$
$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3\cdot 2\Gamma(2) = 3\cdot 2\cdot 1\Gamma(1) = 6\int_0^\infty e^{-t}dt = 6$
b) $t = mv^2/(2kT) \to v^2 = 2kTt/m$ und $dt = dv\; mv/(kT) = dv\sqrt{2mt/(kT)}$
$\bar{v^2} = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\int_{-\infty}^\infty v^2 e^{-mv^2/(2kT)}dv = 2\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\int_0^\infty v^2 e^{-mv^2/(2kT)}dv = 2\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\int_0^\infty \frac{2kT}{m}te^{-t}\sqrt{\frac{kT}{2m}}t^{-1/2}dt$
$= \frac{2kT}{\sqrt{\pi}m}\int_0^\infty t^{1/2}e^{-t}dt = \frac{2kT}{\sqrt{\pi}m}\Gamma(3/2) = \frac{2kT}{\sqrt{\pi}m}\frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \frac{kT}{m}$
c) $e^{-a\pi}|\Gamma(1+ia)|^2 = e^{-a\pi}\Gamma(1+ia)\Gamma(1-ia) = e^{-a\pi}(ia)\Gamma(ia)\Gamma(1-ia) = e^{-a\pi}(ia)\frac{2i\pi}{e^{-\pi a}-e^{\pi a}} = \frac{2\pi a}{e^{2\pi a}-1}$
Anmerkung : Die Wellenfunktion eines vom Coulomb-Potential gestreuten Teilchens ist am Ursprung durch $\psi(0) = e^{-\pi a/2}\Gamma(1+ia)$ gegeben. Bsp.c ist das Quadrat der Wellenfunktion (Wahrscheinlichkeitsdichte), $|\psi(0)|^2 = e^{-\pi a}|\Gamma(1+ia)|^2 = \frac{2\pi a}{e^{2\pi a}-1}$.
d) $t = \sin^2\theta \to dt = 2\sin\theta\cos\theta d\theta$,
$\sin\theta = t^{1/2}$ und $\cos\theta = (1-t)^{1/2}$ ($\cos\theta > 0$ und $\sin\theta > 0$ wenn $0 < \theta < \pi/2$)
$I_n = \int_0^{\pi/2}\cos^n\theta d\theta = \int_0^1 (1-t)^{n/2}\frac{1}{2}t^{-1/2}(1-t)^{-1/2}dt = \frac{1}{2}\int_0^1(1-t)^{(n-1)/2}t^{-1/2}dt$
$= \frac{1}{2}B((n+1)/2, 1/2) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma((n+1)/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(n/2+1)}$
Wenn $n = 2m$
$I_n = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(m+1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(m+1)} = \frac{1}{2}\frac{(m-1/2)(m-3/2)\cdots 1/2\Gamma(1/2)^2}{m(m-1)(m-2)\cdots 1} = \frac{\pi}{2}\frac{2^m(m-1/2)(m-3/2)\cdots 1/2}{2^m m(m-1)(m-2)\cdots 1} = \frac{\pi}{2}\frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 1}{2m(2m-2)(2m-4)\cdots 2}$
$= \frac{\pi}{2}\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} = \frac{\pi}{2}\frac{(n-1)!!}{n!!}$
Anmerkung : Für ungerade n $I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}$ (Nachrechnen!)
Die Rekursionsrelation für das Volumen $V_n(R)$ einer n-dimensionalen Kugel mit Radius R ist $V_n(R) = RB((n+1)/2, 1/2)V_{n-1}(R)$ und die Lösung ist $V_n(R) = R^n\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$

10.2 Sturm-Liouville-Problem II

a) Die Sturm-Liouville'schen Gestalt:
$\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x) + \lambda\rho(x)\right)y(x) = 0 \to p(x)y''(x) + p'(x)y'(x) + q(x)y(x) + \lambda\rho(x)y(x) = 0$
Vergleich mit der Differentialgleichung in der Sturm-Liouville'schen Gestalt :
$p'(x)/p(x) = (2-x)/x$, $q(x)/p(x) = 0$ und $\lambda\rho(x)/p(x) = \lambda/x$
$\to \log(p(x)) = 2\log(x) - x \to p(x) = x^2e^{-x}$, $q(x) = 0$ und $\rho(x) = xe^{-x}$. $\to \left(\frac{d}{dx}\left[x^2e^{-x}\frac{d}{dx}\right] + \lambda xe^{-x}\right)y(x) = 0$
b) $xy''(x) + (2-x)y'(x) = -\lambda y(x)$
$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $y'(x) = a_1 + 2a_2x$, $y''(x) = 2a_2$
$xy''(x) + (2-x)y'(x) = -\lambda y(x) \to 2a_2x + (2-x)(a_1 + 2a_2x) = -\lambda(a_0 + a_1x + a_2x^2) \to -2a_2x^2 + (6a_2 - a_1)x + 2a_1 = -\lambda(a_0 + a_1x + a_2x^2)$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = -\lambda\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

c)

$$\det\begin{pmatrix} \lambda & 2 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 6 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix} = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) = 0 \to \lambda = 0, 1, 2$$

$\lambda_1 = 0 \to (2a_1, -a_1 + 6a_2, -2a_2) = (0, 0, 0) \to (a_0, a_1, a_2) = (C_1, 0, 0) \to y_1(x) = C_1$
$\lambda_2 = 1 \to (2a_1, -a_1 + 6a_2, -2a_2) = (-a_0, -a_1, -a_2) \to (a_0, a_1, a_2) = (C_2, -C_2/2, 0), \to y_2(x) = C_2(1 - x/2)$

$\lambda_3 = 2 \rightarrow (2a_1, -a_1 + 6a_2, -2a_2) = (-2a_0, -2a_1, -2a_2) \rightarrow (a_0, a_1, a_2) = (C_3, -C_3, C_3/6)$
$\rightarrow y_3(x) = C_3(1 - x + x^2/6)$
d) Hinweis : $n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt$ (siehe Bsp.1a)
$\int_0^\infty xe^{-x} y_1(x) y_2(x) dx = C_1C_2 \int_0^\infty e^{-x} x(1 - x/2) = C_1C_2(\Gamma(2) - (1/2)\Gamma(3)) = C_1C_2(1! - (1/2)2!) = 0$
$\int_0^\infty xe^{-x} y_1(x) y_3(x) dx = C_1C_3 \int_0^\infty e^{-x} x(1 - x + x^2/6) dx = C_1C_3(1! - 2! + 3!/6) = 0$
$\int_0^\infty xe^{-x} y_2(x) y_3(x) dx = C_2C_3 \int_0^\infty e^{-x} x(1 - x/2)(1 - x + x^2/6) dx = C_2C_3 \int_0^\infty e^{-x}(x - (3/2)x^2 + (2/3)x^3 - x^4/12) dx = C_2C_3(1! - (3/2)2! + (2/3)3! - 4!/12) = C_2C_3(1 - 3 + 4 - 2) = 0$
Anmerkung : Normierung der Eigenfunktionen
$\int_0^\infty xe^{-x} y_1(x) y_1(x) dx = C_1^2 \int_0^\infty xe^{-x} dx = C_1^2 = 1 \rightarrow C_1 = 1,\ y_1(x) = 1$
$\int_0^\infty xe^{-x} y_2(x) y_2(x) dx = C_2^2 \int_0^\infty xe^{-x}(1 - x/2)^2 dx = C_2^2 \int_0^\infty e^{-x} x(1 - x + x^2/4) dx = C_2^2(1 - 2 + 6/4) = C_2^2/2 = 1 \rightarrow C_2 = \sqrt{2},\ y_2(x) = \sqrt{2}(1 - x/2)$
$\int_0^\infty xe^{-x} y_3(x) y_3(x) dx = C_3^2 \int_0^\infty xe^{-x}(1 - x + x^2/6)^2 dx = C_3^2(1! - 22! + (4/3)3! - (1/3)4! + (1/36)5!) = C_3^2(1 - 4 + 8 - 8 + 10/3) = C_3^2/3 = 1 \rightarrow C_3 = \sqrt{3},\ y_3(x) = \sqrt{3}(1 - x + x^2/6)$
Da $\{1, x, x^2\}$ keine orthogonale Basis sind (d.h. $\int_0^\infty e^{-x} x^n \neq 0$), wird der Vektor (a_0, a_1, a_2) nicht mit $a_i a_i = 1$ normiert.
Anmerkung : Die Differentialgleichung ist die zugeordnete Laguerre-Gleichung. Die Lösungen der Gleichung sind die zugeordneten Laguerre-Polynome, $y_1(x) = L_0^1(x)$, $y_2(x) = L_1^1(x)$ und $y_3(x) = L_2^1(x)$. Mit dem Ansatz $y(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ für großeres n (> 2) können die zugeordneten Laguerre-Polynome bis zum $L_n^1(x)$ gerechnet werden.

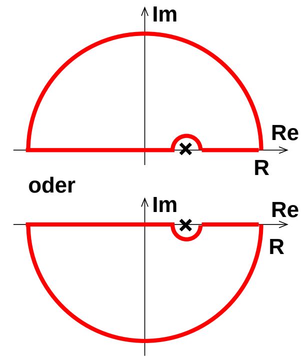
10.3 Greensche Funktion

Ansatz : $G_I(t, t') = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^\infty \tilde{G}_I(\omega)\, e^{i\omega(t-t')} d\omega$
$\mathcal{L}_t G_I(t, t') = \delta(t - t') \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty (-\omega^2 + \Omega^2) \tilde{G}_I(\omega)\, e^{i\omega(t-t')} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{i\omega(t-t')} d\omega$
Vergleich der Integranden: $(-\omega^2 + \Omega^2)\tilde{G}_I(\omega) = 1 \rightarrow \tilde{G}_I(\omega) = \frac{1}{-\omega^2+\Omega^2} = -\frac{1}{(\omega-\Omega)(\omega+\Omega)} = \frac{1}{2\Omega}\left(\frac{1}{\omega+\Omega} - \frac{1}{\omega-\Omega}\right)$
$G_I(t, t') = \frac{1}{4\pi\Omega}\left(\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega+\Omega} d\omega - \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-\Omega} d\omega\right)$

> Da Integral wird mit Hilfe der Kontourintegration berechnet (siehe Bsp.9.1cd), d.h.
> $\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-a} d\omega = \lim_{R\to\infty}\left(\oint_C \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-a} d\omega - \int_{\tilde{C}} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-a} d\omega\right)$
> wobei $\tilde{C}$ eine offene Halbkreis mit Radius R in der komplexen Zahlenebene ist und $C = \tilde{C} + \{z = x| -R < x < R\}$. Der Integrationspfad wird ausgewählt sodass das 2.Integral $\int_{\tilde{C}}$ gleich null ist. In Limes $R \to \infty$ konvergiert $|e^{i\omega(t-t')}| \to 0$ wenn der imaginäre Teil $\mathrm{Im}(\omega(t - t'))$ positiv ist, d.h., $\tilde{C}$ ist eine obere Halbkrei $\tilde{C} = \tilde{C}_1$ für $t > t'$ und eine untere Halbkreis $\tilde{C} = \tilde{C}_2$ für $t < t'$.
> Endlich $\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-a} d\omega = \lim_{R\to\infty} H(t - t') \oint_{C_1} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-a} d\omega + \lim_{R\to\infty} H(t' - t) \oint_{C_2} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-a} d\omega$
> Wenn der Pol in der oberen komplexen Zahlenebene liegt, $\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-a} d\omega = H(t-t') 2\pi i e^{ia(t-t')}$ und wenn der Pol in der unteren komplexen Zahlenebene liegt, $\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-a} d\omega = -H(t' - t) 2\pi i e^{ia(t-t')}$

Die Greensche Funktion wird mit einer Verschiebung der Pole bei $i\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) gerechnet.
$G_I^{(\varepsilon)}(t, t') = \frac{1}{4\pi\Omega}\left(\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega+\Omega-i\varepsilon} d\omega - \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-\Omega-i\varepsilon} d\omega\right) = H(t - t')\frac{i}{2\Omega} e^{(-i\Omega-\varepsilon)(t-t')} - H(t - t')\frac{i}{2\Omega} e^{(i\Omega-\varepsilon)(t-t')}$
$\lim_{\varepsilon\to 0^+} G_I^{(\varepsilon)}(t, t') = H(t - t')\frac{i}{2\Omega} e^{-i\Omega(t-t')} - H(t - t')\frac{i}{2\Omega} e^{i\Omega(t-t')}$
oder
$= H(t - t')\frac{1}{\Omega}\sin(\Omega(t - t'))$
b) Wenn $\varepsilon < 0$, sind die beide Pole in der unteren Halbebene.
$G_I^{(\varepsilon)}(t, t') = \frac{1}{4\pi\Omega}\left(\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega+\Omega-i\varepsilon} d\omega - \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-\Omega-i\varepsilon} d\omega\right) = -H(t' - t)\frac{i}{2\Omega} e^{(-i\Omega-\varepsilon)(t-t')} + H(t' - t)\frac{i}{2\Omega} e^{(i\Omega-\varepsilon)(t-t')}$
$\lim_{\varepsilon\to 0^+} G_I^{(\varepsilon)}(t, t') = -H(t' - t)\frac{i}{2\Omega} e^{-i\Omega(t-t')} + H(t' - t)\frac{i}{2\Omega} e^{i\Omega(t-t')}$
oder
$= -H(t' - t)\frac{1}{\Omega}\sin(\Omega(t - t'))$

c) $G_0(t,t') = G^+(t,t') - G^-(t,t')$
$= (H(t-t') + H(t'-t))\frac{1}{\Omega}\sin(\Omega(t-t')) = \frac{1}{\Omega}\sin(\Omega(t-t'))$
$\frac{d^2}{dt^2}G_0(t,t') = -\Omega\sin(\Omega(t-t')) = -\Omega^2 G_0(t,t') \rightarrow$ erfüllt die homogene Gleichung.



Anmerkung : Der Cauchysche Hauptwert des Integrals ist auf eine Greensche Funktion
$G(t,t') = \frac{1}{4\pi\Omega}\mathcal{P}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega+\Omega}d\omega - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-\Omega}d\omega\right)$
$= \frac{1}{2}\left(G^+(t,t') + G^-(t,t')\right)$
(Nachrechnen mit Hilfe der Kontourintegration! (siehe Abb.))
$\mathcal{L}_t G(t,t') = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}_t G^+(t,t') + \mathcal{L}_t G^-(t,t')\right)$
$= \frac{1}{2}\left(\delta(t-t') + \delta(t-t')\right) = \delta(t-t')$