11. Tutorium **für 15.1.2021**

11.1 Legendre-Polynom

a) Transformiere die Legendresche Differentialgleichung

$$(1-x^2)y_n''(x) - 2xy_n'(x) + n(n+1)y_n(x) = 0\,, \quad (-1 \le x \le 1)$$

in die Sturm-Liouville'sche Gestalt $\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x) + \lambda\rho(x)\right)y(x) = 0$ mit $\lambda = n(n+1)$.

b) Die Menge der Polynomen (Potenzen) $\mathcal{F} = \{u_n(x) = x^n | -1 \le x \le 1$ und $n = 0,1,2,3\}$ spannt einen Vektorraum $\mathcal{V}$ auf. In den Vektorraum $\mathcal{V}$ wird das Skalarprodukt durch $\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\rho(x)dx$ definiert, wobei $f(x) = \sum_{n=0}^{3} f_n x^n$ und $g(x) = \sum_{n=0}^{3} g_n x^n$. Verwende das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren, um die Menge der orthogonalen Polynomen $\mathcal{F}' = \{y_0(x), y_1(x), y_2(x), y_3(x)\}$ zu finden.

Hinweis : Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren
$y_0(x) = u_0(x)$ und $y_n(x) = u_n(x) - \sum_{m=0}^{n-1} \mathbf{E}_m(u_n(x))$ $(n > 0)$ mit dem Orthogonalprojektor $\mathbf{E}_m(u_n(x)) = y_m(x)\frac{\langle y_m|u_n\rangle}{\langle y_m|y_m\rangle}$ zur Funktion y_m.

c) Zeige, dass die Polynome $y_n(x)$ $(n = 0,1,2,3)$ die Legendresche Differentialgleichung aus (a) erfüllt.

11.2 Separationsansatz

a) Zeige, dass in parabolischen Koordinaten (u,v) der Laplace-Operator in zwei Dimensionen durch

$$\nabla^2\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{u^2+v^2}\left(\partial_u^2 + \partial_v^2\right)\psi(\mathbf{x})$$

gegeben wird. $((x,y) = ((u^2-v^2)/2, uv))$.

Hinweis :

$$\nabla\cdot\mathbf{w} = \frac{1}{V}\partial_i(Vw^i)$$

für ein ortsabhängiges Vektorfeld $\mathbf{w} = w^i(\mathbf{x})\mathbf{f}_i$ und $V = \sqrt{\det(\mathbf{g})}$ wobei $\mathbf{g}$ der metrischer Tensor der parabolischen Koordinaten ist (siehe Bsp.6.1).

b) Führe den Separationsansatz $\psi(\mathbf{x}) = P(u)Q(v)$ der Differentialgleichung

$$\left(\nabla^2 + \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2x\right)\psi(\mathbf{x}) = 0$$

durch und schreibe die Differentialgleichungen der u- und v-Koordinaten an.

11.3 Frobenius-Methode

a) Verwende den Ansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\sigma}$ $(a_0 \neq 0)$ und bestimme die charakteristischen Exponenten σ der Differentialgleichung

$$x^2 y'' + 2xy' + x^2 y = 0\,.$$

b) Löse die Differentialgleichung und schreibe die allgemeine Lösung an.

Ankreuzbar: 1ab, 1c, 2a, 2b, 3ab

Ein kurzer Ausblick auf zukünftige Semester: In allen Fächern der Physik werden viele Phänomene von Differentialgleichungen beschrieben. Die Eigenschaften der Differentialgleichungen werden im Rahmen des Sturm-Liouville-Problems, und des Separationsansatzes analysiert und die Greensche Funktion und Frobenius-Methode sind praktische Methoden, um die Lösungen zu finden. Das Eigenwertproblem und das Spektraltheorem tauchen oft insbesondere in Quantentheorie (5. Sem) und Statistischer Physik (6. Sem) auf. Legendre-Polynome, Delta Distribution, Heaviside Funktion und andere spezielle Funktionen werden in Elektrodynamik (4. Semester) und Quantentheorie wiederkehren. Sie sind wichtige Grundlagen auch für numerische Rechnungen (wie z.B Gauß-Quadratur). Ko- und kontravariante Schreibweise werden in Elektrodynamik I & II für die spezielle Relativitätstheorie gebraucht. Die duale Basis erscheint in Form des reziproken Gitters in der Festkörperphysik (6. Sem). Die Gamma-Funktion wird in Statistischer Physik (6. Sem) eine wichtige Rolle spielen. Somit sollten die "Mathematischen Methoden" eine wichtige Grundlage für künftige theoretische Vorlesungen bieten.