11. Tutorium - Lösungen **15.1.2021**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel anzuschauen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

11.1 Legendre-Polynom

a) $\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right]+q(x)+n(n+1)\rho(x)\right)y(x)=0 \to p(x)y''(x)+p'(x)y'(x)+q(x)y(x)+n(n+1)\rho(x)y(x)=0$
Vergleich mit der Differentialgleichung in der Sturm-Liouville'schen Gestalt :
$p'(x)/p(x)=-2x/(1-x^2)$, $q(x)/p(x)=0$ und $\rho(x)/p(x)=1/(1-x^2)$
$\to \log(p(x))=\log(1-x^2) \to p(x)=1-x^2$, $q(x)=0$ und $\rho(x)=1 \to \left(\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}\right]+n(n+1)\right)y(x)=0$
b) $\langle u_m|u_n\rangle=\int_{-1}^{1}x^{n+m}dx$.
Wenn $n+m$ ungerade ist, ist x^{n+m} eine ungerade Funktion. $\to \langle u_m|u_n\rangle=0$.
Sonst $\langle u_m|u_n\rangle=\frac{2}{n+m+1}$
$y_0(x)=u_0(x)=1$
$y_1(x)=u_1(x)-E_0(u_1(x))=u_1(x)-y_0(x)\frac{\langle y_0|u_1\rangle}{\langle y_0|y_0\rangle}=u_1(x)-u_0(x)\frac{\langle u_0|u_1\rangle}{\langle u_0|u_0\rangle}=x$
$y_2(x)=u_2(x)-E_0(u_2(x))-E_1(u_2(x))=u_2(x)-y_0(x)\frac{\langle y_0|u_2\rangle}{\langle y_0|y_0\rangle}-y_1(x)\frac{\langle y_1|u_2\rangle}{\langle y_1|y_1\rangle}$
$=u_2(x)-u_0(x)\frac{\langle u_0|u_2\rangle}{\langle u_0|u_0\rangle}-u_1(x)\frac{\langle u_1|u_2\rangle}{\langle u_1|u_1\rangle}=x^2-\frac{1}{3}$
$y_3(x)=u_3(x)-E_0(u_3(x))-E_1(u_3(x))-E_2(u_3(x))=u_3(x)-y_0(x)\frac{\langle y_0|u_3\rangle}{\langle y_0|y_0\rangle}-y_1(x)\frac{\langle y_1|u_3\rangle}{\langle y_1|y_1\rangle}-y_2(x)\frac{\langle y_2|u_3\rangle}{\langle y_2|y_2\rangle}$
$=u_3(x)-u_0(x)\frac{\langle u_0|u_3\rangle}{\langle u_0|u_0\rangle}-u_1(x)\frac{\langle u_1|u_3\rangle}{\langle u_1|u_1\rangle}-(u_2(x)-1/3)\frac{\langle u_2-1/3|u_3\rangle}{\langle u_2-1/3|u_2-1/3\rangle}=x^3-\frac{3}{5}x$
c) $(1-x^2)y_n''(x)-2xy_n'(x)+n(n+1)y_n(x)=0$
Wenn n=0, $y_0''(x)=0$ und $y_0'(x)=0$. $\to y_0(x)=1$ erfüllt die Gleichung.
Wenn n=1, $y_1''(x)=0$ und $y_1'(x)=1$. $\to y_1(x)=x$ erfüllt die Gleichung.
Wenn n=2, $y_2''(x)=2$ und $y_2'(x)=2x$. $\to (1-x^2)y_2''(x)-2xy_2'(x)+6y_2(x)=(1-x^2)2-4x^2+6(x^2-1/3)=0$
$\to y_2(x)=x^2-1/3$ erfüllt die Gleichung.
Wenn n=3, $y_3''(x)=6x$ und $y_3'(x)=3x^2-3/5$.
$\to (1-x^2)y_3''(x)-2xy_3'(x)+12y_3(x)=(1-x^2)6x-6x^3+(6/5)x+12(x^3-(3/5)x)=0$
$\to y_3(x)=x^3-3/5x$ erfüllt die Gleichung.

11.2 Separationsansatz

a) parabolische Koordinaten : $(x^1,x^2)=(u,v)$, kartesische Koordinaten : $(x'^1,x'^2)=(x,y)$,
$\mathbf{dx}=dx'^i\mathbf{e}_i=dx^j\partial_j x'^i\mathbf{e}_i\equiv dx^j\mathbf{f}_j$
$\mathbf{S}=(s^i{}_j)=(\partial_j x'^i)=\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$
$\mathbf{g}=(u^2+v^2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to V=\sqrt{\det(\mathbf{g})}=u^2+v^2$
$\mathbf{g}^*=(u^2+v^2)^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\mathbf{w}=\nabla\psi(\mathbf{x})=\mathbf{f}^i\partial_i\psi(\mathbf{x})=\mathbf{f}_j g^{ji}\partial_i\psi(\mathbf{x})\equiv\mathbf{f}_j w^j$
$\nabla^2\psi(\mathbf{x})=\nabla\cdot\mathbf{w}=\frac{1}{u^2+v^2}\partial_i((u^2+v^2)w^i)=\frac{1}{u^2+v^2}\partial_i((u^2+v^2)g^{ij}\partial_j\psi(\mathbf{x}))=\frac{1}{u^2+v^2}\partial_u^2\psi(\mathbf{x})+\frac{1}{u^2+v^2}\partial_v^2\psi(\mathbf{x}))$
b) $\left(\nabla^2+\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}+2x\right)\psi(\mathbf{x})=\frac{1}{u^2+v^2}\left(\partial_u^2+\partial_v^2\right)\psi(\mathbf{x})+\frac{4}{u^2+v^2}+u^2-v^2=0$
Ansatz : $\psi(\mathbf{x})=P(u)Q(v)$
$\to \frac{1}{u^2+v^2}P''(u)Q(v)+\frac{1}{u^2+v^2}P(u)Q''(v)+\frac{4}{u^2+v^2}P(u)Q(v)+(u^2-v^2)P(u)Q(v)=0$
$\to P''(u)Q(v)+P(u)Q''(v)+4P(u)Q(v)+(u^4-v^4)P(u)Q(v)=0$
$\to \frac{1}{P(u)}P''(u)+\frac{1}{Q(v)}Q''(v)+4+u^4-v^4=0$
$\to \frac{1}{P(u)}P''(u)+u^4+4=-\frac{1}{Q(v)}Q''(v)+v^4$

linke Seite: Funktion von u, rechte Seite: Funktion von v
$\rightarrow$ Die Gleichung gilt für beliebige u, v nur wenn die beide Seiten konstant sind (unabhängig von u, v).
$\frac{1}{P(u)}P''(u) + u^4 + 4 = -\frac{1}{Q(v)}Q''(v) + v^4 = C$ (Konstante)
$\rightarrow P''(u) + u^4 P(u) + (4 - C)P(u) = 0$ und $Q''(v) - v^4 Q(v) + CP(u) = 0$

11.3 Frobenius-Methode

a) $x^2 y'' + 2xy' + x^2 y = 0$
Ansatz : $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\sigma}$
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\sigma)(n+\sigma-1)x^{n+\sigma} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(n+\sigma)x^{n+\sigma} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\sigma+2} = 0$
$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\sigma)(n+\sigma-1)x^{n+\sigma} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(n+\sigma)x^{n+\sigma} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+\sigma} = 0$
Koeffizientenvergleich, x^σ Term : $a_0\sigma(\sigma-1) + 2a_0\sigma = a_0(\sigma^2+\sigma) = 0$. Da $a_0 \neq 0$, $\sigma = 0, -1$ $(\sigma^2 = -\sigma)$
b) Koeffizientenvergleich
$x^{\sigma+1}$ Term : $a_1(\sigma+1)\sigma + 2a_1(\sigma+1) = a_1(\sigma^2+3\sigma+2) = 2a_1(\sigma+1) = 0$
$\rightarrow a_1 = 0$ oder $\sigma = -1$
$x^{\sigma+n}$ Term $(n > 1)$: $a_n(n+\sigma)(n+\sigma-1) + 2a_n(n+\sigma) + a_{n-2} = 0$
$\rightarrow a_n(n^2 + (2\sigma+1)n + \sigma^2 + \sigma) + a_{n-2} = 0$
$\rightarrow a_n(n^2 + (2\sigma+1)n) = -a_{n-2}$
$\rightarrow a_n = -\frac{1}{n(n+2\sigma+1)}a_{n-2}$

Wenn $\sigma = 0$, $a_1 = 0 \rightarrow a_n = 0$ für ungerades n
Für gerades n,
$a_n = -\frac{1}{n(n+1)}a_{n-2} = (-1)^2\frac{1}{n(n+1)(n-2)(n-1)}a_{n-4} = \cdots = (-1)^{n/2}\frac{1}{(n+1)!}a_0$
$y_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{(2m+1)!}a_0 x^{2m} = a_0\frac{1}{x}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} = a_0\frac{\sin x}{x}$

Wenn $\sigma = -1$, kann a_1 nicht gleich null sein.
Für gerades n,
$a_n = -\frac{1}{n(n-1)}a_{n-2} = (-1)^{n/2}\frac{1}{n!}a_0$
$y_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{(2m)!}a_0 x^{2m-1} = a_0\frac{\cos x}{x}$
Für ungerades n,
$a_n = -\frac{1}{n(n-1)}a_{n-2} = (-1)^{(n-1)/2}\frac{1}{n!}a_1$
$y_2(x) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{(2m+1)!}a_1 x^{2m+1-1} = a_1\frac{\sin x}{x}$

Allgemeine Lösung : zwei linear unabhängige Lösungen, $y_0(x)$ und $y_1(x)$ ($y_0(x)$ und $y_2(x)$ sind linear abhängig).
$y(x) = A\frac{\cos x}{x} + B\frac{\sin x}{x}$

Anmerkung :
Die Helmholtz-Gleichung $(\nabla^2 + k^2)\psi(\mathbf{r}) = 0$ in Kugelkoordinaten führt nach Separation der Variablen auf die Radialgleichung $x^2y'' + 2xy' + (x^2 - \nu(\nu+1))y = 0$ (nachrechnen!). Die Lösungen $y_\nu(x)$ sind die sphärischen Bessel-Funktionen $j_\nu(x)$, die sphärischen Neumann-Funktionen $n_\nu(x)$ und die sphärischen Hankel-Funktionen $h_\nu^{(1,2)}(x)$. Das Beispiel ist ein Fall mit $\nu = 0$, wobei $j_0(x) = \sin(x)/x$, $n_0(x) = -\cos(x)/x$, und $h_0^{(1,2)}(x) = \mp ie^{\pm ix}/x$.