1. Tutorium **für 16.10.2020**
(Gruppen 1-8 : Online)

Informationen zu den Übungen

- Die Beispiele sind online in TUWEL bis Freitag, 00:00Uhr, anzukreuzen! Eine spätere Änderung der Kreuze ist nicht mehr möglich.

- **Nur für die Online-Tutorien** : lade die ausgearbeitete Lösung (jedes Beispiel getrennt) auf TUWEL hoch. Trage dich am Tag des Tutoriums in TUWEL die Anwesenheitsabfrage ein. Der Link zum Online-Tutorium wird auf TUWEL gepostet.

- Die Anzahl der angekreuzten Beispiele geht in die Endnote ein. Mindestens 50% aller Beispiele müssen angekreuzt werden, aber je mehr, desto besser. Die Tafelleistung (oder die Online-Präsentation) wird mit „OK“ oder „nicht vorbereitet“ bewertet. In letzterem Fall werden alle Kreuze des Tages gestrichen. Zum Bestehen der Übung ist mindestens eine positive Bewertung notwendig. Sieh die Übung als gute Gelegenheit, Unklarheiten bei den Beispielen zu klären. Nütze die Gelegenheit, um Fragen zu stellen!

- Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel anzuschauen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

- In dieser Übung werden mathematische Grundlagen vermittelt, die später vor allem in „Elektrodynamik“ und „Quantentheorie“ zur Anwendung kommen, aber auch in anderen Vorlesungen und Übungen nützlich sein werden. Es zahlt sich also aus, von Anfang an eifrig mitzuarbeiten! :)

1.1 Indexschreibweise

a) Gegeben seien die Matrizen $\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{C} = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Berechne unter Beachtung der Einsteinschen Summenkonvention $a_{ij}b_{jk}$.
b) Berechne mit denselben Matrizen $a_{ij}c_{kj}$.
c) Berechne mit denselben Matrizen $a_{ij}b_{ki}c_{kj}$.
d) Schreibe in Indexschreibweise $\mathbf{ABC}$ (für allgemeine Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$).
e) Schreibe in Indexschreibweise $\mathbf{C}^T\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ (für allgemeine Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$).

1.2 Skalarprodukt

Gegeben seien die Funktionen ($0 \leq x \leq L$)

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \sqrt{\frac{1}{L}} e^{i\lambda_k x} \quad \text{und} \quad g(x) = \sum_{k=1}^{N} b_k \sqrt{\frac{1}{L}} e^{i\lambda_k x} \quad \text{mit } \lambda_k = \frac{2\pi k}{L} \, .$$

(x, L : reelle Zahlen, a_k, b_k : komplexe Zahlen, $\overline{c}$: konjugiert komplexe Zahl zu c)
a) Zeige, dass die Basisfunktionen $\{(1/L)^{1/2} e^{i\lambda_1 x}, (1/L)^{1/2} e^{i\lambda_2 x}, \cdots, (1/L)^{1/2} e^{i\lambda_N x}\}$ orthonormal sind, d.h.

$$\frac{1}{L} \int_0^L \overline{e^{i\lambda_k x}} e^{i\lambda_\ell x} dx = \delta_{k\ell} \, .$$

(Das Kronecker-Delta : $\delta_{k\ell} = 1$ wenn $k = \ell$ und 0 wenn $k \neq \ell$).
b) Berechne das Skalarprodukt

$$\langle f|g \rangle = \int_0^L \overline{f(x)} g(x) dx$$

und zeige $\langle f|g \rangle = \sum_{k=1}^{N} \overline{a_k} b_k$.

1.3 Differentialgleichung in Matrix-Vektorform

a) Schreibe die gekoppelte lineare Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = 2x - y \qquad \frac{dy}{dt} = -2x + 3y$$

in die Matrix-Vektorform $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{A}\mathbf{r}$ um, wobei $\mathbf{A}$ eine 2×2 Matrix ist und $\mathbf{r} = (x \quad y)^T$.
b) Schreibe die Differentialgleichung aus a) in die Matrix-Vektorform $d\mathbf{R}/dt = \mathbf{B}\mathbf{R}$ um, wobei $\mathbf{B}$ eine 2×2 Matrix ist und $\mathbf{R} = (X \quad Y)^T = (x - y \quad 2x + y)^T$.
c) Das Polynom $y(x) = a_3 x^2 + a_2 x + a_1$ erfüllt die Differentialgleichung $xy''(x) + (1 - x)y'(x) + \lambda y(x) = 0$ (λ : Konstante). Schreibe die Gleichungen für die Koeffizienten $\mathbf{a} = (a_1 \quad a_2 \quad a_3)^T$ in die Matrix-Vektorform $\mathbf{C}\mathbf{a} = \lambda \mathbf{a}$ mit der 3×3 Matrix $\mathbf{C}$.

Ankreuzbar: 1a-c, 1de, 2ab, 3ab, 3c