1. Tutorium - Lösungen **09.10.2020**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel anzuschauen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

1.1 Indexschreibweise

Vorbemerkung: Beachte, dass hier die folgende Schreibweise verwendet wird: "$\mathbf{A} = (a_{ij})$"
Die 2×2 Matrix $\mathbf{A}$ hat vier Einträge: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.
Die i-te Zeile und die j-te Spalte der Matrix lässt sich sauber so darstellen: $(\mathbf{A})_{ij} = a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{ij}$,
also $(\mathbf{A})_{11} = a_{11}$, $(\mathbf{A})_{12} = a_{12}$, etc. Wenn es nur zwei freie Indizes gibt, und auch keine Gefahr der Vertauschung besteht (etwa wegen alphabetischer Reihenfolge der Indizes), wird das zuweilen verkürzt zu $\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.
a)
$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Lösung mit Indexschreibweise :
$a_{ij}b_{jk} (= \sum_{j=1}^{2} a_{ij}b_{jk}) = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k}$
$\to a_{1j}b_{j1} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = -4 + 6 = 2$, $a_{1j}b_{j2} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 2 - 2 = 0$,
$a_{2j}b_{j1} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = -12 + 12 = 0$, $a_{2j}b_{j2} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = 6 - 4 = 2$.

Lösung mit Matrix-Vektorform :
$a_{ij}b_{jk} = (\mathbf{AB})_{ik} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\right]_{ik} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{ik}$
b) Lösung mit Indexschreibweise :
$a_{ij}c_{kj} (= \sum_{j=1}^{2} a_{ij}c_{kj}) = a_{i1}c_{k1} + a_{i2}c_{k2}$
$\to a_{1j}c_{1j} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} = 1 + 2 = 3$, $a_{1j}c_{2j} = a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} = 0 - 2 = -2$,
$a_{2j}c_{1j} = a_{21}c_{11} + a_{22}c_{12} = 3 + 4 = 7$, $a_{2j}c_{2j} = a_{21}c_{21} + a_{22}c_{22} = 0 - 4 = -4$.

Lösung mit Matrix-Vektorform :
$a_{ij}c_{kj} = (\mathbf{AC}^T)_{ik} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right]_{ik} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}_{ik}$
c) Lösung mit Indexschreibweise :
$a_{ij}b_{ki}c_{kj} (= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} a_{ij}b_{ki}c_{kj}) = \underbrace{(a_{ij}c_{kj})}_{\text{siehe b)}} b_{ki} = (a_{1j}c_{1j})b_{11} + (a_{1j}c_{2j})b_{21} + (a_{2j}c_{1j})b_{12} + (a_{2j}c_{2j})b_{22}$
$= -12 - 6 + 14 + 4 = 0$

Lösung mit Matrix-Vektorform :
$a_{ij}b_{ki}c_{kj} = a_{ij}c_{kj}b_{ki} = (\mathbf{AC}^T)_{ik}(\mathbf{B})_{ki} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}_{ik}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}_{ki} = \begin{pmatrix} -18 & 8 \\ -40 & 18 \end{pmatrix}_{ii} = 0$
d) $(\mathbf{ABC})_{ij} = (\mathbf{A})_{ik}(\mathbf{BC})_{kj} = (\mathbf{A})_{ik}(\mathbf{B})_{k\ell}(\mathbf{C})_{\ell j} = a_{ik}b_{k\ell}c_{\ell j}$
e) $(\mathbf{C}^T\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T)_{ij} = (\mathbf{C}^T)_{ik}(\mathbf{B}^T)_{k\ell}(\mathbf{A}^T)_{\ell j} = c_{ki}b_{\ell k}a_{j\ell} = a_{j\ell}b_{\ell k}c_{ki}$.
Umbenennen von Indizes ($i \to j$ und $j \to i$) $(\mathbf{C}^T\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T)_{ji} = \underbrace{a_{i\ell}b_{\ell k}c_{kj}}_{k\to\ell,\ell\to k} = a_{ik}b_{k\ell}c_{\ell j}$ (siehe d).

Hinweis : $\mathbf{C}^T\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T = (\mathbf{ABC})^T \to (\mathbf{C}^T\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T)_{ji} = ((\mathbf{ABC})^T)_{ji} = (\mathbf{ABC})_{ij}$

1.2 Skalarprodukt

a) $I \equiv \frac{1}{L}\int_0^L e^{-i\lambda_k x} e^{i\lambda_\ell x} dx = \frac{1}{L}\int_0^L e^{i(\lambda_\ell - \lambda_k)x} dx$

Wenn $k = \ell$, $I = \frac{1}{L}\int_0^L dx = 1$

Wenn $k \neq \ell$, $I = \frac{1}{L} \left. \frac{e^{i(\lambda_\ell-\lambda_k)x}}{i(\lambda_\ell-\lambda_k)} \right|_0^L = \frac{1}{L}\frac{e^{i(\lambda_\ell-\lambda_k)L}-1}{i(\lambda_\ell-\lambda_k)} = \frac{1}{L}\frac{e^{i2\pi(\ell-k)}-1}{i(\lambda_\ell-\lambda_k)} = 0$ (k, ℓ : Ganzzahlen)

b) Skalarprodukt :

$\langle f|g\rangle = \int_0^L \overline{f(x)} g(x) dx = \frac{1}{L}\int_0^L \sum_{k=1}^N \sum_{\ell=1}^N \overline{a_k} b_\ell e^{-i\lambda_k x} e^{i\lambda_\ell x} dx = \sum_{k=1}^N \sum_{\ell=1}^N \overline{a_k} b_\ell \frac{2}{L}\int_0^L e^{-i\lambda_k x} e^{i\lambda_\ell x} dx$

$= \sum_{k=1}^N \sum_{\ell=1}^N \overline{a_k} b_\ell \delta_{\ell k} = \sum_{k=1}^N \overline{a_k} b_k$

1.3 Differentialgleichung in Matrix-Vektorform

a) $\frac{dx}{dt} = 2x - y\,,\quad \frac{dy}{dt} = -2x + 3y$

$d\mathbf{r}/dt = \mathbf{A}\mathbf{r} \rightarrow \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y,\ \ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y$

Vergleich der Gleichungen : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\frac{dx}{dt} = 2x - y\,,\quad \frac{dy}{dt} = -2x + 3y \rightarrow \frac{dX}{dt} = \frac{d(x-y)}{dt} = 4x - 4y = 4X,\ \ \frac{dY}{dt} = \frac{d(2x+y)}{dt} = 2x + y = Y$

$d\mathbf{R}/dt = \mathbf{B}\mathbf{R} \rightarrow \frac{dX}{dt} = b_{11}X + b_{12}Y,\ \ \frac{dY}{dt} = b_{21}X + b_{22}Y$

Vergleich der Gleichungen : $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $y(x) = a_3x^2 + a_2x + a_1$

$y'(x) = 2a_3x + a_2$

$y''(x) = 2a_3$

Die Differenzialgleichung wird umgeschrieben :

$xy''(x) + (1-x)y'(x) + \lambda y(x) = 0 \rightarrow 2a_3x + (1-x)(2a_3x + a_2) + \lambda(a_3x^2 + a_2x + a_1) = 0$

$\rightarrow (\lambda - 2)a_3x^2 + (4a_3 + (\lambda-1)a_2)x + a_2 + \lambda a_1 = 0$

Die Gleichung gilt für ein beliebiges x :

$(\lambda-2)a_3 = 0,\ 4a_3 + (\lambda-1)a_2 = 0,\ a_2 + \lambda a_1 = 0 \rightarrow 2a_3 = \lambda a_3,\ a_2 - 4a_3 = \lambda a_2,\ -a_2 = \lambda a_1$

Diese Gleichungen werden mit $\mathbf{C}\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}$, d.h. $c_{ij}a_j = \lambda a_i$ verglichen :

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$